This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

Math 5008.92

SCIENCE CENTER LIBRARY

FROM THE

MARY OSGOOD LEGACY.

"To purchase such books as shall be most needed for the College Library, so as best to promote the objects of the College."

Received 3 Apr. 1897.

LEÇONS

DE

L'AGRÉGATION CLASSIQUE

DE MATHÉMATIQUES

LEÇONS

DE

L'AGRÉGATION CLASSIQUE

DE MATHÉMATIQUES

PAR

G. KŒNIGS

Maître de conférences à l'École normale supérieure et à la Sorbonne,

Professeur remplaçant au Collège de France.

PARIS

LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE A. HERMANN

LIBRAIRE DE S. M. LE ROI DE SUÈDE ET DE NORVÈGE

8, Rue de la Sorbonne, 8

1892

~~V. 9.1.4~~
Math 5008.92

HARVARD COLLEGE
APR 3 1897
LIBRARY.
Mary Osgood fund.

TABLE DES MATIÈRES

Pages.

INTRODUCTION 1

Intersection de deux quadriques dans le cas où cette intersection se décompose 3

Étude des contacts 12

Sur les propriétés métriques d'un faisceau de coniques 18

Axes d'une section plane d'une quadrique 19

Centre de la section 20

Axes 22

Axe et paramètre dans le cas de la section parabolique 30

Les quadriques en coordonnées tangentielles 31

Centre de la surface 33

Dégénérescences projectives 34

Discussion métrique 36

Résumé 40

Sur les nombres e et π 41

Sphères tangentes à quatre plans donnés 70

Sphères tangentes à quatre sphères données 79

Sur l'équation en λ 93

Discussion relative à la réalité 103

Résumé de la discussion 106

Sur l'inversion et les surfaces et les courbes anallagmatiques 108

De l'inversion 109

La symétrie par rapport à un plan comme cas particulier d'inversion 111

Sur les systèmes de sphères dans l'espace 113

Surfaces anallagmatiques 114

Autre définition des surfaces anallagmatiques 120

Des courbes anallagmatiques 121

Les courbes anallagmatiques sphériques 123
Remarques sur l'application de l'inversion aux systèmes de sphères 125
Les courbes cycliques 130
Les cycliques planes 133
Des cas particuliers. — Singularités essentielles et apparentes 135
Types dérivés du type A par inversion 137
Types dérivés du type B 140
Types dérivés du type C 141
Podaires et inverses de coniques dans le plan 141
Des foyers et des focales 145
Les foyers des cycliques 148
Représentation analytique des cycliques planes 152
Cycliques du 4e degré 153
Surfaces cyclides 162
Les inverses ou podaires de quadriques 169
Des anallagmaties dans les cyclides 176
Cyclides cubiques 198
Remarque sur la transformation des déférentes d'une cyclide 202
Focales des cyclides 205
Cercles des cyclides, plans bi-tangents 206

Exercices 207

on peut donc regarder λ, μ comme les coordonnées sur la surface f du point M.

A toute équation entre λ, μ correspond sur f une courbe et réciproquement. Chasles a démontré à ce sujet un théorème important.

Théorème. Soit $F(\lambda, \mu) = 0$ une équation entière du degré p en λ, du degré q en μ ; elle représente une courbe de degré $p+q$ tracée sur la surface.

En effet, tout plan tangent à la surface coupe la courbe aux mêmes points où cette courbe est rencontrée par les deux droites H, G, traces de la surface sur ce plan tangent. Or, toute droite H coupe la courbe en p points, car se donner H revient à fixer la valeur de μ et l'équation $F=0$ fournit pour λ p valeurs à chacune desquelles correspond une génératrice G, et par suite un point sur H. De même, toute génératrice G coupe la courbe en q points. Donc, tout plan tangent de f coupe la courbe en $p+q$ points ; celle-ci est donc du degré $p+q$.

Par exemple, considérons une conique tracée sur la surface ; toute génératrice rectiligne ne peut évidemment la rencontrer qu'en un seul point qui est celui où elle perce son plan. Donc, une conique quelconque tracée sur la surface aura pour équation

$$A\lambda\mu + B\lambda + C\mu + D = 0$$

et réciproquement.

Supposons qu'il s'agisse d'une courbe gauche de 3ème ordre. Une telle courbe devra nécessairement être coupée en deux points par les génératrices d'un système et en un par celles de l'autre système, car il n'existe pas de droite coupant trois fois une cubique gauche, sans quoi le plan mené par une telle droite et un quatrième point de la cubique devrait contenir la courbe. Ainsi toute cubique tracée sur une quadrique, admet comme cordes les génératrices rectilignes d'un système et comme sécantes simples celles de l'autre. Donc, au point de vue de la surface, il y a deux sortes de cubiques tracées sur elle, suivant le système de génératrices qui constitue les cordes de cette cubique.

Dans le cas des cubiques, l'équation $F(\lambda, \mu) = 0$ est de degré 2 en λ et 1 en μ, ou 2 en μ et 1 en λ. Pour les courbes gauches de quatrième ordre, il y a plus de variété.

On peut avoir des courbes du quatrième ordre qui coupent en trois points

les génératrices d'un système, et en un seul celles de l'autre. Ce sont les quartiques de Steiner; pour ces courbes, l'équation F est du degré 1 en λ ou 3 en μ, ou 1 en μ et 3 en λ; mais nous n'avons pas à nous en occuper.

En revanche, on peut encore avoir des courbes gauches du 4ième ordre qui coupent en deux points toutes les génératrices, indistinctement. Il est aisé de reconnaître que tel est le cas de la courbe d'intersection de f avec une autre surface φ quelconque du second degré. En effet, chaque génératrice de f coupe φ en deux points qui appartiennent à l'intersection.

Nous pouvons au surplus traiter analytiquement la question et parvenir ainsi fort aisément: 1° à la notion exacte de ce qu'il faut entendre par décomposition de l'intersection; 2° à la discussion de tous les cas possibles.

Toute quadrique φ sera représentée par une équation de la forme.

$$(4)\ldots\ \varphi = AX^2+A'Y^2+A''Z^2+A'''T^2+2BYZ+2B'ZX+2B''XY+2CXT+2C'YT+2C''ZT=0$$

Si l'on transporte dans cette équation les valeurs de X, Y, Z, T tirées des équations (4) et qui conviennent à tout point pris sur f, on aura dans le résultat de cette substitution

$$(5)\ldots\ F(\lambda,\mu)=A\lambda^2\mu^2+2C\lambda^2\mu+2B'\lambda\mu^2+A'''\lambda^2+A''\mu^2+2(B''+C''')\lambda\mu$$
$$+2C'\lambda+2B\mu+A'=0.$$

l'équation en λ, μ de la trace de φ sur f. C'est bien, on le voit, une équation du second degré en μ et du second degré en λ. C'est même la plus générale de cette espèce.

Soit en effet l'équation générale du second degré en λ et du second degré en μ.

$$(a\lambda^2+b\lambda+c)\mu^2+(a'\lambda^2+b'\lambda+c')\mu+(a''\lambda^2+b''\lambda+c'')=0;$$

pour identifier avec (5), il suffit d'écrire

$$A=a,\ A'=c'',\ A''=c\qquad A'''=a'',\ 2B=c',\ 2B'=b\qquad 2C=a',\ 2C'=b''\qquad 2(B''+C''')=b'$$

L'identification laisse subsister un paramètre arbitraire puisque C''', par exemple, peut être pris arbitrairement. Les quadriques φ correspondantes forment un faisceau dont f fait partie.

En effet posons:

$$\varphi_0(X,Y,Z,T)=aX^2+c''Y^2+cZ^2+a''T^2+c'YZ+bZX+b'XY+a'XT+b''YT$$

la forme φ peut s'écrire,

$$\varphi_0(X,Y,Z,T)+2c''(ZT-XY)$$

ou

$$\varphi_0 (X, Y, Z, T) - 2C'' f$$

On voit par-là que si deux polynômes φ, φ_0 conduisent par la substitution (3) à une même fonction $F(\lambda, \mu)$ du second degré en λ, et du second degré en μ, φ et φ_0 ne diffèrent que par l'addition d'un terme de la forme σf où σ est une constante.

Le raisonnement subsiste si le polynôme se trouve décomposable en facteurs rationnels. Il est donc établi que l'étude de l'intersection de f avec une autre quadrique φ revient à l'étude de l'équation en λ, μ du second degré par rapport à chacune des variables.

Si $F(\lambda, \mu)$ est indécomposable, nous avons une courbe gauche du 4ième degré. Mais si $F(\lambda, \mu)$ admet des facteurs rationnels en λ, μ, chacun de ces facteurs représente une ligne de degré moindre, et l'ensemble des lignes correspondant aux divers facteurs dans lesquels F se décompose constitue l'intersection complète de f et de φ. On dit dans ce cas que l'intersection se décompose.

Faisons d'abord une remarque de détail qui nous évitera des distinctions oiseuses. Lorsque nous avons écrit

$$f = XY - ZT$$

nous avons rapporté f à un tétraèdre $XYZT = 0$ dans lequel deux couples d'arêtes sont formés de génératrices de la surface. Il existe autant de manières de réduire f à cette forme, que l'on peut concevoir de quadrilatères gauches formés avec quatre génératrices de f. Si donc on considère une courbe tracée sur f, on peut toujours éviter le cas où un des sommets de ce quadrilatère serait sur cette courbe. Cela étant, on peut toujours supposer que le terme en $\lambda^2 \mu^2$ figure dans $F(\lambda, \mu)$, car si $A = 0$, la quadrique $\varphi = 0$ passe au point M $(Y = Z = T = 0)$, et comme ce point M est aussi sur $f = 0$, il en résulte qu'il appartient à l'intersection. Ce point M est d'ailleurs un des sommets du tétraèdre de référence. On peut donc toujours écarter ce cas.

Puisque $\lambda^2 \mu^2$ est l'ensemble des termes de degré le plus élevé dans $F(\lambda, \mu)$, l'ensemble des termes de degré le plus élevé de tout diviseur de $F(\lambda, \mu)$ devra diviser $\lambda^2 \mu^2$, cet ensemble aura donc une de ces formes

$$\lambda^2 \mu, \ \lambda \mu^2, \ \lambda^2, \mu^2, \ \lambda \mu, \ \lambda, \mu$$

A ——. Examinons d'abord le cas où l'ensemble des termes de degré le plus élevé d'un diviseur est $\lambda\mu$; ce diviseur sera

$$\lambda\mu + p\lambda + q\mu + r$$

et l'autre diviseur aura forcément la même forme, en sorte que

$$(6)\ldots\ldots\ldots F(\lambda,\mu) = A(\lambda\mu + p\lambda + q\mu + r)(\lambda\mu + p\lambda + q'\mu + r')$$

L'intersection se compose alors de deux coniques et même de deux coniques quelconques tracés sur f. Soit $P=0$, $Q=0$ les plans de ces coniques ; il est aisé de montrer que toute quadrique φ du faisceau a une équation de la forme

$$(7)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots PP' + \rho f = 0$$

En effet, d'après les équations (3) les plans des coniques auront pour équations

$$P = X + pT + qZ + rY = 0\ ,\quad P' = X + p'T + q'Z + r'Y = 0$$

Si nous faisons

$$\varphi_0(X,Y,Z,T) = A\,.\,P\,.\,P'$$

le résultat de la substitution des valeurs (3) dans φ_0 sera précisément $F(\lambda,\mu)$. Il doit en être de même pour toute autre quadrique φ du faisceau ; donc, d'après une remarque précédente, on aura :

$$\varphi - \varphi_0 = \sigma f$$

ou :

$$\varphi = APP' + \sigma f$$

ce qui revient à l'équation (7).

B —— Mais dans l'identité (6) il peut arriver que l'un des facteurs soit lui-même décomposable ; par exemple

$$\lambda\mu + p\lambda + q\mu + r = (\lambda - a)(\mu - b)$$

Dans ce cas, l'une des deux coniques dégénère en un système de deux droites de système différent, et le plan P de ces deux droites est alors tangent à la surface f. Le faisceau a encore la représentation (7) ; seulement le plan P est tangent à la surface f. La réciproque est évidente.

C —— Il peut arriver encore que les deux facteurs se décomposent et que

$$\lambda\mu + p\lambda + q\mu + r = (\lambda - a)(\mu - b)$$
$$\lambda\mu + p'\lambda + q'\mu + r' = (\lambda - a')(\mu - b')$$

Chacune des deux coniques du cas A se décompose alors en deux droites, et les deux plans P, P' qui les contiennent deviennent tangents. Le faisceau

possède encore la représentation (7), seulement les plans P, P' sont tangents à f.

Réciproquement, toutes les surfaces comprises dans l'équation (7) et où P, P' sont deux plans tangents quelconques à f; coupent f suivant quatre génératrices, deux d'un système et deux de l'autre.

D ——— Enfin, en nous maintenant toujours dans le cas où les deux facteurs se décomposent il peut arriver que $a' = a$ et même que $a' = a$, $b' = b$; mais laissons pour un instant cette hypothèse qui rentre dans le cas où $F(\lambda, \mu)$ est carré parfait, et soit seulement

$$a' = a$$

On a alors l'identité:

$$F(\lambda, \mu) = A(\lambda - a)^2 (\mu - b)(\mu - b')$$

qui prouve que l'intersection se compose de la droite $\lambda = a$ ou G, comptée deux fois, et de deux droites H, H' ($\mu = b$, $\mu = b'$) du système opposé.

Posons encore

$$P = X - aZ - bT + abV$$

$$P' = X - aZ - b'T + ab'V$$

le plan $P = 0$ sera celui des deux droites G et H; $P' = 0$ celui des deux droites G et H'; d'ailleurs, si l'on pose

$$\varphi_0 = A PP'$$

les formules (3) transformeront $\varphi_0(X, Y, Z, T)$ dans $F(\lambda, \mu) = A(\lambda - a)^2 (\mu - b)(\mu - b')$. Pareillement pour toute autre quadrique φ du faisceau; donc ici encore

$$\varphi - \varphi_0 = \sigma f,$$

et par suite, le faisceau possède encore la représentation (7), seulement les plans P, P' sont assujettis à la condition de contenir une même droite G de la surface f.

La réciproque est évidente. Si dans l'équation (7) P et P' sont deux plans menés par une même génératrice G de la surface f, toutes les quadriques du faisceau ont en commun outre cette droite G, deux droites H, H' du système opposé, intersection fixe de ces surfaces par les plans P, P' respectivement. Nous verrons plus loin que les surfaces se raccordent le long de G.

E ——— J'arrive maintenant au cas où les deux facteurs

$$\lambda\mu + p\lambda + q\mu + r \quad , \quad \lambda\mu + p'\lambda + q'\mu + r'$$

coïncident, en sorte que

$$F(\lambda,\mu) = A(\lambda\mu + p\lambda + q\mu + r)^2$$

L'intersection ne comprend alors qu'une seule conique qui doit être comptée deux fois.

Si l'on pose encore :

$$P = X + pT + qZ + rY$$

les équations (3) transforment AP^2 dans $F(\lambda,\mu)$; on a donc d'après une remarque déjà utilisée

$$\varphi - AP^2 = \sigma f,$$

ce qui prouve que φ possède cette équation.

(8) . . . . . $P^2 + \sigma f = 0$

La réciproque est d'ailleurs évidente ; toute quadrique dont l'équation a la forme (8), où P est un plan arbitraire, fournit, comme résultat de la substitution (3), la même expression que P^2, c'est-à-dire le carré d'une fonction linéaire en λ, μ. L'intersection ne comporte qu'une conique unique. Nous verrons plus loin que les surfaces du faisceau sont tangentes en tous les points de cette conique.

F——— Enfin un dernier cas est celui où P serait un plan tangent à la quadrique f. Dans ce cas

$$\lambda\mu + p\lambda + q\mu + r$$

se décompose dans le produit $(\lambda - a)(\mu - b)$ et la conique se décompose en deux droites.

Les propriétés de contact subsistent d'ailleurs, comme nous le verrons, et la représentation générale du faisceau est encore fournie par l'équation (8), seulement le plan P touche la surface.

Au point où nous en sommes, il peut sembler qu'il nous reste encore à parcourir un grand nombre d'hypothèses dans la discussion générale. En réalité cependant, il ne nous en reste qu'une.

Considérons par exemple l'hypothèse d'un diviseur dont l'ensemble des termes du plus haut degré serait λ^2, ce diviseur aura la forme

$$\lambda^2 + p\lambda + q\mu + r$$

il sera accompagné d'un second diviseur dont l'ensemble des termes du plus haut

degré sera μ^2, et ce second facteur sera ainsi

$$\mu^2 + q'\lambda + p'\mu + r'$$

en sorte que

$$F(\lambda,\mu) = A(\lambda^2 + p\lambda + q\mu + r)(\mu^2 + q^2\lambda + p'\mu + r')$$

Mais comme $F(\lambda\mu)$ ne contient ni λ^3 ni μ^3, il faudra que $q = q' = 0$, et il restera

$$F(\lambda,\mu) = A(\lambda^2 + p\lambda + r)(\mu^2 + p'\mu + r')$$

Ce cas est celui que nous avons déjà considéré (cas C) et dans lequel les deux coniques dégénèrent en un couple de droites. Si l'un des trinômes, celui en λ par exemple était carré parfait, on retrouverait le cas (D) déjà considéré et enfin le cas (F) si les deux trinômes étaient carrés parfaits.

G.— Nous avons donc épuisé tous les cas où $F(\lambda,\mu)$ admet plusieurs diviseurs de la forme $\lambda - a$ ou $\mu - b$. Il ne nous reste plus que le cas où $F(\lambda,\mu)$ admettrait un seul diviseur linéaire, $\lambda - p$ par exemple, auquel cas $\lambda\mu^2$ doit être l'ensemble des termes de degré le plus élevé du second facteur. Nous aurons ainsi :

$$F(\lambda,\mu) = [(a\mu^2 + b\mu + c)\lambda + (a'\mu^2 + b^2\mu + c')](\lambda - p)$$

Il sera superflu d'étudier les cas de décomposition du premier facteur, car nous retomberions nécessairement sur des cas où $F(\lambda,\mu)$ possède plusieurs diviseurs binômes du premier degré.

L'intersection se compose ici d'une génératrice G et puis d'une courbe qui est manifestement du 3ième degré ; puisque l'équation

$$(a\mu^2 + b\mu + c)\lambda + a^2\mu^2 + b'\mu + c' = 0$$

est du premier degré en λ et du second en μ.

On voit même que toutes les génératrices du même système que G (λ = const) sont des cordes de la cubique, tandis que les autres ne la rencontrent qu'une fois. Donc, dans ce cas, l'intersection se compose d'une cubique gauche et d'une corde de cette cubique.

On peut fort aisément, à l'aide des équations (4) mettre en évidence le caractère unicursal de la courbe. Si l'on pose

$$a\mu^2 + b\mu + c = \theta(\mu) \qquad a'\mu^2 + b'\mu + c' = \theta_1(\mu)$$

l'équation de la cubique sur la surface s'écrit

$$\theta(\mu)\lambda + \theta_1(\mu) = 0$$

et par suite les équations (4) relatives à un point X, Y, Z, T de la cubique deviennent

$$\frac{X}{-\mu\,\theta_1(\mu)} = \frac{Y}{\theta(\mu)} = \frac{Z}{\mu\,\theta(\mu)} = \frac{T}{-\theta_1(\mu)}.$$

représentation qui nous manifeste bien une cubique gauche.

La surface φ n'est assujettie à d'autre condition que d'avoir une génératrice rectiligne commune avec f. Réciproquement, si ce fait se produit, la présence de la génératrice commune G exige dans $F(\lambda, \mu)$ la présence d'un facteur $\lambda - \mu$, et nous nous trouverons précisément dans l'hypothèse actuelle.

Ainsi:

Lorsque deux quadriques ont une droite commune, elles se coupent généralement en outre, suivant une cubique gauche.

Ce théorème n'est pas isolé.

Si deux quadriques ont en commun une conique, $F(\lambda, \mu)$ admet un diviseur $\lambda\mu + p\lambda + q\mu + r$, et est par suite égal au produit de deux tels facteurs; le second facteur, comme nous savons, représente une seconde conique. Donc:

Si deux quadriques ont une conique commune, elles ont en commun une seconde conique.

Si deux quadriques ont en commun deux droites G, G' non situées dans un même plan, il faut que $F(\lambda, \mu)$ possède un diviseur trinôme du second degré en λ, mais alors, nous le savons, le second facteur de F est un trinôme du second degré en μ, lequel représente deux génératrices H, H' de l'autre système.

Ainsi

Si deux quadriques ont en commun deux droites non situées dans un même plan, elles ont en commun un autre couple de droites, non sécantes entre elles, mais qui coupent les deux premières.

Etude des Contacts

La question du contact méritait d'être traitée à part. Si les quadriques f, φ ne se touchent pas, la courbe d'intersection du quatrième ordre ne possède aucun point double. Elle en acquiert un A, si f et φ se touchent en A. Il est dès lors

impossible que f et φ se touchant en deux points, l'intersection demeure indécomposable, car si A, B, sont les deux points de contact, le plan mené par AB et un point de l'intersection, coupe en cinq points la courbe du quatrième ordre, ce qui est impossible à moins que cette courbe ne se décompose et n'ait une de ses branches dans ce plan.

La question des contacts se lie donc à celle de la décomposition. Nous allons parcourir les cas A, B, C, D, E, F, G et énumérer dans chaque cas les contacts qui se présentent.

Cas A — L'intersection se compose de deux coniques ; ces deux coniques se coupent en deux points où la surface est percée par la droite d'intersection Δ de leurs plans. En ces deux points, les surfaces f, φ sont donc tangentes. Il peut arriver accidentellement que Δ soit tangente à la surface f, on peut dire que dans ce cas, les surfaces f, φ, sont tangentes en deux points infiniment voisins.

Cas B — L'intersection se compose d'une conique C et de deux droites G,H se croisant en un point O. Comme ci-dessus, les quadriques f, φ seront tangentes aux points de rencontre de C avec G,H ; mais en outre elles seront tangentes au point O.

Accidentellement, il peut arriver que le point O soit sur la conique C, alors les trois points de contact ci-dessus coïncideront. Il est intéressant de montrer que dans ce cas, si l'on coupe f et φ par un même plan π issu de O, les deux coniques π_f, π_φ d'intersection ont toujours un contact de second ordre en O.

En effet, menons un plan sécant π à une petite distance du point O ; ce plan coupe la conique C en deux points M, M', dont l'un M' voisin de O, et les droites H,G en deux points h,g voisins également de O. Les traces π_f, π_φ des deux surfaces f, φ sur le plan π sont deux coniques qui se coupent en M,M', h,g. Si le plan π tend à passer par le point O, les trois points M', h,g tendent à se confondre, et à la limite les coniques π_f, π_φ sont osculatrices au point O.

Il en résulte bien que deux coniques quelconques, intersections de f et φ par un plan π arbitrairement mené par O, sont osculatrices en ce point. On dit alors de f, φ qu'elles sont osculatrices au point O. Le raisonnement précédent prouve que si le plan π tend à passer par la tangente en O à la conique C, les

quatre points M, M', h, g viennent se confondre simultanément en O, les coniques π_f, π_φ sont surosculatrices.

Cas C — Les surfaces f, φ contiennent le même quadrilatère gauche, elles se touchent aux quatre sommets de ce quadrilatère.

Cas D — Le cas D est celui où deux des génératrices d'un même système viennent à coïncider dans le cas précédent. L'intersection se compose d'une droite G et de deux droites H, H' de l'autre système; soit mené un plan π par la droite G, ce plan coupe f et φ suivant des droites D, Δ respectivement et de même système que H et H'. Ces deux droites D et Δ se coupent en un point I qui appartient à la fois aux deux surfaces; mais dans tout plan π mené par G, il n'y a pas de point de l'intersection des deux surfaces en dehors de la droite G (sauf si le plan π contient H ou H'); donc il faut que D et Δ se coupent sur G; mais cela suffit pour montrer que les surfaces f et g se raccordent tout le long de G, puis que les points où π touche f et φ sont ceux où D et Δ coupent G et que ces deux points coïncident. Il y a plus.

Soient A et B les points où H et H' coupent G; en A et B les plans tangents sont les plans (G, H) et (G, H'). Je dis que f et g sont osculatrices au point A. Menons en effet un plan π très voisin de A, qui coupe G, H, H' en des points g, h, h'; les traces des quadriques f, φ sur le plan π seront deux coniques π_f, π_φ qui se toucheront au point g et se couperont en outre en h et h'. Supposons que le le plan π tende à passer par le point A, les points g et h tendront à se confondre avec A, et les coniques π_f, π_φ toujours tangentes en g finiront par avoir un troisième point de rencontre confondu avec g lorsque g coïncidera avec A.

De même pour B.

Cas E — L'intersection se compose d'une seule conique C. Tout plan π coupe les surfaces f et φ suivant deux coniques π_f, π_φ, qui n'ont pas d'autres points communs que les points M, M' où le plan π coupe la conique C; comme rien ne distingue l'un de l'autre les points M et M' qui peuvent être pris arbitrairement sur la conique C, il faut que deux des points de rencontre de π_f, π_φ coïncident avec M et deux autres avec M'. Donc π_f et π_φ sont tangents en M et M'. Il suffit de faire tourner le plan π autour de M M' pour reconnaître que les

surfaces se touchent en M et M'. Les surfaces f et φ sont donc tangentes en tous les points de C.

Cas F — Le cas F est le cas précédent où la conique C se décompose en deux droites. On verra comme précédemment que les deux surfaces se raccordent tout le long de ces deux droites.

Menons un plan π par le point O, ce plan coupe f et φ suivant deux coniques π_f et π_φ : il ne rencontre l'intersection de f et φ qu'en un seul point O, donc π_f et π_φ ne peuvent se rencontrer qu'en ce point. Il faut donc que les quatre points de rencontre de π_f et π_φ soient confondus en O. Ces coniques sont donc surosculatrices au point O.

Cas G — L'Intersection se compose d'une cubique gauche et d'une Corde AB de cette cubique. Les plans tangents en A et B aux surfaces f et φ sont les mêmes ; on le voit facilement en remarquant que le plan tangent en A doit contenir outre la droite AB la tangente en A à la cubique.

Cette démonstration tombe en défaut si A et B coïncident. Mais alors on peut employer le procédé utilisé déjà et qui consiste à considérer un plan sécant π qui tend à passer par le point A ; on voit ainsi tendre vers A deux des points de rencontre des coniques π_f et π_φ.

Après cette discussion complète des contacts, il convient de tenir compte des imaginaires et de montrer l'utilité de l'extension abstraite que nous avons attribuée à nos raisonnements.

Je considère une surface qui, rapportée à un tétraèdre de référence réel possède des coefficients réels, et soit dénuée de génératrices réelles, par exemple les deux ellipsoïdes :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\pm 1 ,$$

l'hyperboloïde à deux nappes

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

Il est évident que si une surface à coefficients réels contient une droite imaginaire, elle contient la droite imaginaire conjuguée. Il faut d'après cela exclure pour les surfaces à génératrices imaginaires tous les cas de décomposition où figurent un nombre impair de droites. Les cas D, G sont donc exclus. Mais il est utile et instructif de montrer par des exemples simples que tous les autres cas peuvent être réalisés.

Pour le cas A, cela n'est douteux puisqu'il n'y figure que de vraies coniques ; il est bon toutefois de faire remarquer que tel est le cas des deux sphères arbitraires.

Si le rayon du cercle commun à deux sphères devient nul ; les sphères deviennent tangentes ; (c'est le cas B) car les sphères ont alors en commun, outre le cercle de l'infini, les deux droites isotropes issues du point de contact dans le plan tangent commun. Donc deux sphères tangentes au sens élémentaire de ce mot sont en réalité tangentes en trois points, savoir, au point de contact ordinaire, et puis aux deux points où les droites isotropes déjà signalées coupent le cercle de l'infini.

Le cas C peut être réalisé comme il suit : Soient A, B ombilics d'un ellipsoïde, symétriques par rapport à un plan de symétrie et réels : les génératrices imaginaires issues de A sur l'ellipsoïde sont des droites isotropes, de même pour celles issues de B. Donc si l'on envisage la sphère tangente en A et B à l'ellipsoïde, cette sphère aura en commun avec l'ellipsoïde le quadrilatère imaginaire formé par ces quatre droites isotropes. Cette sphère (réelle) sera donc quatre fois tangente à l'ellipsoïde.

Le cas E n'offre pas de difficulté spéciale puisqu'il n'y figure qu'une conique. Il est bon cependant de rappeler que deux sphères concentriques en sont un exemple.

Enfin le cas F est réalisé par un ellipsoïde de révolution et la sphère E engendrée par la révolution du cercle osculateur au sommet O de l'ellipse méridienne. Toutes les ellipses provenant de la section par un plan passant par O, auront un sommet au point O, car d'après un théorème déjà établi, chacune possède un contact du 3ième ordre avec le cercle qui est la trace sur son plan de la sphère E.

Remarque .—. Je crois bon de mettre en garde contre le raisonnement suivant que l'on serait tenté de faire dans les cas A, B, C, D. On pourrait dire, par exemple, dans le cas A : les plans P, P' de deux coniques forment un ensemble PP', quadrique dégénérée ; qui contient toute l'intersection, donc elle fait partie du faisceau, lequel est ainsi représenté par :

$$PP' + \rho f = 0$$

Ce raisonnement serait peu satisfaisant. Prenons, en effet, par exemple, le cas E ; l'intersection est une conique ; soit $P=0$ son plan ; soit $Z=0$ un plan quelconque. La quadrique singulière

$$PZ = 0$$

contient tous les points de l'intersection, cependant elle ne fait point partie du faisceau. La marche que j'indique évite cette difficulté.

Il résulte de la discussion précédente que non-seulement les quadriques d'un même faisceau ont en commun les mêmes points, mais encore que si, en un point commun, deux quadriques d'un faisceau se touchent, il en est de même de toutes les quadriques du faisceau. Mais on voit qu'il ne serait pas tout à fait exact d'énoncer sans précautions la réciproque. Une quadrique peut contenir tous les points communs à deux autres sans faire partie avec elles d'un même faisceau. Il y a lieu de tenir compte des contacts. Mais le théorème suivant est vrai :

Si une quadrique 1° Contient tous les points communs à deux quadriques. 2° Touche ces quadriques en tous ceux de ces points où elles sont tangentes, de sorte que l'ordre des contacts soit le même ; la quadrique fait partie d'un même faisceau avec les deux quadriques considérées.

Nous avons démontré par le fait ce théorème quand nous avons prouvé que si deux quadriques φ, φ_0 conduisant à la même fonction $F(\lambda, \mu)$, on a :

$$\varphi - \varphi_0 = \sigma f$$

La démonstration que l'on donne habituellement de ce théorème

laisse subsister la lacune que je viens de signaler

Lectures.

Chasles — Théorie analytique des courbes à double courbure de de tous les ordres tracées sur l'hyperboloïde à une nappe. Comptes rendus de l'Académie des Sciences, séances des 2, 16, 30 Décembre 1861

Darboux — Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces p. 29.

Painvin — Géométrie analytique.

Sur les propriétés métriques d'un faisceau de coniques.

J'énonce les propriétés suivantes, faciles à démontrer.

1° Si, dans un faisceau de coniques, il y a une ellipse, les deux paraboles du faisceau sont réelles, et réciproquement, si les paraboles sont réelles, il y a des ellipses dans le faisceau.

2° S'il y a dans le faisceau plus d'une hyperbole équilatère, toutes les coniques du faisceau sont des hyperboles équilatères.

Excluons ce dernier cas. Il y a alors le plus grand avantage à choisir pour axes de coordonnées les asymptotes de l'hyperbole équilatère unique du faisceau. Cette hyperbole possède une équation de la forme

$$2xy + a^2 = 0$$

Soit $A x^2 + A' y^2 + A'' + 2By + 2B'x + 2B''xy = 0$ l'équation d'une autre conique du faisceau; le faisceau aura donc cette équation

$$A x^2 + A' y^2 + (A'' + a^2\lambda) + 2By + 2B'x + 2(B'' + \lambda)xy = 0 +$$

On voit en prenant $\lambda = -B''$ qu'il y a une conique du faisceau dont les axes sont parallèles aux axes de l'hyperbole équilatère du faisceau. Si l'on choisit précisément cette conique pour la seconde

conique qui sert à définir le faisceau, on aura $B''=0$, et la représentation du faisceau prend finalement cette forme éminemment simple

$$A x^2 + A' y^2 + (A'' + a^2 \lambda) + 2By + 2B'x + 2\lambda xy = 0$$

J'engage à essayer avec ces coordonnées la recherche des lieux des centres, des foyers, l'enveloppe des axes, l'enveloppe des asymptotes des coniques d'un faisceau.

On voit aisément que la conique E dont les axes sont parallèles aux axes choisis, est une ellipse ($AA' > 0$) aussitôt que les deux paraboles du faisceau sont réelles et réciproquement. Cette ellipse jouit des propriétés suivantes:

C'est de toutes celles du faisceau, l'ellipse dont l'excentricité est minimum. Si, par son centre on mène des parallèles aux deux axes des paraboles du faisceau, on obtient les deux diamètres conjugués de cette ellipse.

Axes d'une section plane d'une quadrique.

Pour obtenir les axes de la section d'une quadrique S par un plan quelconque π, on peut opérer de bien des manières.

On peut d'abord, ainsi que le fait Mr Pruvost dans son excellent traité de géométrie analytique considérer les axes d'une quadrique Σ circonscrite à la quadrique S tout du long de sa section par le plan π, et supposer ensuite que la quadrique Σ s'aplatit infiniment. On peut, en second lieu, d'après une méthode qui m'a été communiquée par M. X. Antomari, chercher les axes du cylindre qui admet pour section droite la courbe d'intersection de la surface S par le plan π. On peut encore exprimer directement que tout axe de la section est un diamètre perpendiculaire à ses cordes conjuguées.

Enfin on peut chercher le maximum et le minimum du carré d'un rayon vecteur issu du centre. C'est cette dernière méthode que je suivrai, en raison de sa simplicité. Nous verrons plus loin qu'elle conduit facilement au calcul du paramètre et à la détermination de l'axe pour le cas d'une section parabolique.

Centre de la Section.

Occupons-nous d'abord du Centre I de la section, dans l'hypothèse d'un centre unique. Le cône directeur de la surface ayant l'équation :

$$\varphi(x,y,z) = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2By z + 2B'zx + 2B''xy = 0$$

la surface elle-même sera représentée par :

$$f(x,y,z) = \varphi(x,y,z) + 2cx + 2c'y + 2c''z + D = 0 \ ;$$

soit en outre

$$ux + vy + wz + p = 0$$

l'équation du plan sécant Π

Le centre $I(x_0, y_0, z_0)$ est à l'intersection du plan π avec le diamètre conjugué correspondant

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{u} = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{v} = \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{w}$$

nous aurons donc, ρ désignant un paramètre auxiliaire

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} Ax_0 + B''y_0 + B'z_0 + C &= \rho u \\ B''x_0 + A'y_0 + Bz_0 + C' &= \rho v \\ B'x_0 + By_0 + A''z_0 + C'' &= \rho w \end{aligned} \right.$$

$$(2) \quad ux_0 + vy_0 + wz_0 + p = 0$$

Le déterminant de ces équations en $x_0\ y_0\ z_0\ \rho$ est :

$$-\phi(u,v,w) = \begin{vmatrix} A & B'' & B' & u \\ B'' & A' & B & v \\ B' & B & A'' & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix} ,$$

en posant suivant l'usage

$$\phi(u,v,w) = (A'A'' - B^2)u^2 + (A''A - B'^2)v^2 + (AA' - B''^2)w^2 + 2(B'B'' - AB)vw + 2(B''B - A'B')wu + 2(BB' - AB)uv,$$

en sorte que ϕ est la forme adjointe de la forme φ.

L'équation $\phi = 0$ exprimerait que le cône directeur $\varphi = 0$ est touché par le cône $ux + vy + wz = 0$, mené par l'origine parallèlement au plan π ; on voit donc que $\phi = 0$ exprimerait que les plans parallèles au plan π, et le plan lui-même, coupent le cône φ, et par suite la surface f, suivant des courbes du genre parabole. Ainsi l'hypothèse d'un centre unique pour la section entraîne l'hypothèse de ϕ différent de zéro. Les équations (1) (2) détermineront donc sans difficulté les coordonnées x_0, y_0, z_0 du centre I de la section.

Nous aurons besoin dans un instant de connaître $f(x_0, y_0, z_0)$, que je représente abréviativement par f_0 ; les équations (1) multipliées respectivement par x_0, y_0, z_0 et ajoutées donnent

$$f_0 = Cx_0 + C'y_0 + C''z_0 + \rho(ux_0 + vy_0 + wz_0) + D$$

mais à cause de (2) on peut écrire aussi

$$f_0 = Cx_0 + C'y_0 + C''z_0 - \rho p + D \tag{3}$$

si l'on élimine alors x_0, y_0, z_0, ρ entre les équations (1)(2)(3), ce qui revient à porter dans (3) les valeurs de x_0, y_0, z_0, ρ tirées de (1)(2), il vient :

$$\begin{vmatrix} A & B'' & B' & C & u \\ B'' & A' & B & C' & v \\ B' & B & A'' & C'' & w \\ C & C' & C'' & D - f_0 & p \\ u & v & w & p & o \end{vmatrix} = o . \tag{4}$$

Posons

$$H(u,v,w,p) = \begin{vmatrix} A & B'' & B' & C & u \\ B'' & A' & B & C' & v \\ B' & B & A'' & C'' & w \\ C & C' & C'' & D & p \\ u & v & w & p & o \end{vmatrix}$$

en sorte que H est la forme adjointe de la forme obtenue en rendant f homogène ; on sait que $H=0$ exprimerait que le plan π est tangent à la surface S. L'équation (4) se développe ainsi,

$$H+f_0\,\Phi=0$$

d'où,

$$f_0=-\frac{H(u,v,w,\rho)}{\Phi(u,v,w)}.$$

Axes.

Ceci posé, menons par le centre I de la section, le rayon $IM=r$ aboutissant à un point $M(x,y,z)$ de cette section, et soient α,β,γ les cosinus directeurs de cette droite IM. (Nous supposons en ce moment les axes rectangulaires, mais notre méthode subsisterait sans grandes modifications pour le cas d'axes quelconques, il suffirait de modifier l'équation (6), α,β,γ étant les paramètres de direction de IM).

Nous aurons ces deux équations

$$(5)\qquad u\alpha+v\beta+w\gamma=0$$

$$(6)\qquad \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$$

dont la première exprime que IM est dans le plan π. Les coordonnées x,y,z du point M ont ces expressions

$$x=x_0+\alpha r \qquad y=y_0+\beta r \qquad z=z_0+\gamma r$$

l'équation (5) exprime déjà que IM est dans le plan π, la suivante exprime que M est sur la section

$$0=f(x,y,z)=f_0+(\alpha f'_{x_0}+\beta f'_{y_0}+\gamma f'_{z_0})\,r+\varphi(\alpha,\beta,\gamma)r^2$$

A priori, puisque I est le centre, le coefficient de r doit être nul. On le vérifie aisément, car d'après les équations (1) le

coefficient de ε est proportionnel au premier membre de (5) lequel est nul. Nous avons donc :

$$(7) \qquad \varphi(\alpha, \beta, \gamma) = -\frac{f_0}{r^2} = \frac{H}{\phi} \cdot \frac{1}{r^2}$$

La recherche du maximum ou du minimum de r^2 ou de $\frac{1}{r^2}$ revient donc à la recherche analogue pour $\varphi(\alpha, \beta, \gamma)$ où α, β, γ sont liés par les deux équations (5) (6). Supposons α, β, γ exprimés en fonction d'un paramètre de manière à vérifier ces relations (5) et (6); on peut, par exemple, choisir pour variable indépendante l'un des trois cosinus α. Alors, φ est une fonction de α dont β, γ sont aussi des fonctions et pour le maximum ou le minimum de φ il faut avoir

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \cdot \beta' + \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma} \gamma' = 0$$

où β', γ' sont fournis par les deux équations obtenues en différentiant (5) et (6).

$$u + v \cdot \beta' + w \cdot \gamma' = 0$$
$$\alpha + \beta \cdot \beta' + \gamma \cdot \gamma' = 0$$

en exprimant la compatibilité de ces trois équations en $\beta' \gamma'$ nous trouvons donc,

$$(8) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} & \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} & \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma} \\ \alpha & \beta & \gamma \\ u & v & w \end{vmatrix} = 0$$

Cette équation (8) est du second degré et homogène en α, β, γ, jointe à (5) qui est homogène et du premier degré elle déterminera deux systèmes de valeurs des rapports $\alpha : \beta : \gamma$: l'équation (6) fixera ensuite les valeurs absolues de α, β, γ

Soient x, y, z les coordonnées d'un point de l'un des axes dont α, β, γ sont les cosinus directeurs; α, β, γ, sont proportionnels à $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$; donc puisque (8) est homogène en α, β, γ, on peut remplacer ces cosinus directeurs par leurs valeurs proportionnelles et (8)

devient, en changeant les colonnes en lignes

$$(8') \qquad \begin{vmatrix} A\overline{x-x_0} + B''\overline{y-y_0} + B'\overline{z-z_0} & x-x_0 & u \\ B''\overline{x-x_0} + A'\overline{y-y_0} + B\overline{z-z_0} & y-y_0 & v \\ B'\overline{x-x_0} + B\overline{y-y_0} + A''\overline{z-z_0} & z-z_0 & w \end{vmatrix} = 0$$

la première colonne s'écrit encore $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x_0}\right)$, $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y_0}\right)$, $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z_0}\right)$ et comme $\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_0} = \rho u$, $\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y_0} = \rho v$, $\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial z_0} = \rho w$, il vient simplement :

$$(8'') \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & x-x_0 & u \\ \frac{\partial f}{\partial y} & y-y_0 & v \\ \frac{\partial f}{\partial z} & z-z_0 & w \end{vmatrix} = 0$$

Les équations (8') et (8'') sont parfaitement équivalentes, seulement, la forme (8'') contient les coordonnées x_0, y_0, z_0 du centre d'une façon moins compliquée que (8'). En revanche on reconnaît sur la forme (8') de l'équation un cône ayant son sommet au centre I ; il coupe le plan π suivant les deux axes de la section[1]. L'équation (8'') jointe à l'équation du plan π représente donc l'ensemble des deux axes de la section.[1]

Mais à cette forme de la solution, utile pour certaines recherches, nous allons en substituer une autre plus complète, qui

---

(1). Ce cône est capable d'un trièdre trirectangle inscrit, car il contient la normale au plan π ; il passe également au centre de la surface, et contient les parallèles aux axes de la surface S issues de son sommet. On peut conclure de ces caractères que le cône est celui qui contient les six normales issues du point I à la surface S.

nous fournira les longueurs des demi axes.

Reprenons les équations (5) (6) (8) qui résolvent complètement le problème en ce qui concerne la position des axes. On peut regarder (8) comme le résultat de l'élimination de trois paramètres non tous nuls, σ, τ, λ entre les trois équations

$$\tau \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + 2\sigma u - 2\lambda \alpha = 0$$

$$\tau \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} + 2\sigma v - 2\lambda \beta = 0$$

$$\tau \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma} + 2\sigma w - 2\lambda \gamma = 0$$

En multipliant par α, β, γ et ajoutant, il vient :

$$\tau\left(\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \beta \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} + \gamma \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma}\right) + 2\sigma(u\alpha + v\beta + w\gamma)$$

$$- 2\lambda(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = 0$$

En tenant compte des relations (5) et (6) il vient

$$2\tau\varphi(\alpha, \beta, \gamma) - 2\lambda = 0 .$$

Si $\tau = 0$, λ est nul, et alors σu, σv, σw sont tous nuls, ce qui exige $\sigma = 0$. Cela est impossible, car τ, λ, σ ne sont pas tous nuls. Donc, τ n'étant pas nul, nous pourrons en divisant par τ réduire au cas de $\tau = 1$, et il vient ainsi

$$(9) \qquad \lambda = \varphi(\alpha, \beta, \gamma)$$

en même temps que les équations ci-dessus deviennent

$$(10) \begin{cases} (A - \lambda)\alpha + B''\beta + B'\gamma + \sigma u = 0 \\ B''\alpha + (A' - \lambda)\beta + B\gamma + \sigma v = 0 \\ B'\alpha + B\beta + (A'' - \lambda)\gamma + \sigma w = 0 \end{cases}$$

à ces équations, adjoignons l'équation (5)

$$(5) \qquad u\alpha + v\beta + w\gamma = 0$$

La compatibilité des équations (10) (11) en $\alpha, \beta, \gamma, \sigma$, (étant donné que α, β, γ ne sont pas tous nuls à cause de (6)), s'exprime donc par l'équation

$$(11) \qquad \begin{vmatrix} A-S & B'' & B' & u \\ B'' & A'-S & B & v \\ B' & B & A''-S & w \\ u & v & w & o \end{vmatrix} = o$$

équation qui développée donne

$$(12) \quad \ldots\ldots (u^2+v^2+w^2)S'^2 - \left[\sqrt{A+A'+A''}\,(u^2+v^2+w^2) - \varphi(u,v,w)\right]S' + \phi(u,v,w) = o$$

S étant égal à l'une des deux racines de cette équation, les équations (10) et (5) définissent surabondamment les rapports $\alpha : \beta : \gamma$; l'équation (6) donnera ensuite la valeur absolue de α, β, γ. Quant à la longueur du demi axe correspondant, les formules (7) (9) nous prouvent que

$$(13) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots S' = \frac{H}{\phi}\,\frac{1}{r^2}$$

en sorte que la substitution dans (12) de cette valeur de S' donnerait l'équation aux carrés des demi-axes.

Le problème proposé est donc ainsi complètement résolu.

Remarque I — La détermination des axes dépend de l'équation (12). Cette équation doit donc, à priori, avoir ses deux racines réelles ; autrement dit, on doit avoir

$$\Delta = \left[\sqrt{A+A'+A''}\,(u^2+v^2+w^2) - \varphi(u,v,w)\right]^2 - 4\,\phi(u,v,w)(u^2+v^2+w^2) \geq o$$

Pour le montrer j'observe que un changement d'axes rectangulaires laisse invariables $A+A'+A''$, $u^2+v^2+w^2$, et que $\phi(u,v,w)$ se transforme en $\phi_0(u',v',w',)$ où ϕ_0 est la forme adjointe de la forme $\varphi_0(x',y',z')$ en laquelle $\varphi(x,y,z)$ se transforme. Ainsi Δ

lui même sera un invariant.

Rapportons le cone directeur à ses axes et soit

$$\varphi_0(x',y',z') = ax'^2 + by'^2 + cz'^2$$

on aura

$$\phi_0(u',v',w') = bc\,u'^2 + ca\,v'^2 + ab\,w'^2$$

d'où

$$\Delta = \left[\sqrt{a+b+c}\,(u'^2+v'^2+w'^2) - (a\,u'^2+bv'^2+cw'^2)\right]^2 - 4\,(bcu'^2+cav'^2+abw'^2)(u'^2+v'^2+w'^2)$$

d'où

$$\Delta = (b-c)^2 u'^4 + (c-a)^2 v'^4 + (a-b)^2 w'^4 - 2(a-b)(c-a)v'^2w'^2 - 2(b-c)(a-b)w'^2u'^2 - 2(c-a)(b-c)u'^2v'^2$$

$$= -(\sqrt{b-c}\,u' + \sqrt{c-a}\,v' + \sqrt{a-b}\,w')(-\sqrt{b-c}\,u' + \sqrt{c-a}\,v' + \sqrt{a-b}\,w')$$
$$(\sqrt{b-c}\,u' - \sqrt{c-a}\,v' + \sqrt{a-b}\,w')(\sqrt{b-c}\,u' + \sqrt{c-a}\,v' - \sqrt{a-b}\,w')$$

Soit, pour fixer les idées $a \geq b \geq c$. On pourra écrire

$$\Delta = \left\{\left[\sqrt{b-c}\,u' + \sqrt{a-b}\,w'\right]^2 + (a-c)v'^2\right\}\left\{\left[\sqrt{b-c}\,u' - \sqrt{a-b}\,w'\right]^2 + (a-c)v'^2\right\}.$$

Ainsi Δ apparait comme le produit de deux sommes de carrés.

Δ ne pourrait être nul que si l'un de ses quatre facteurs l'était.

Soit :

$$(14) \qquad \sqrt{b-c}\,.\,u' + \sqrt{c-a}\,.\,v' + \sqrt{a-b}\,.\,w' = 0$$

Le plan sécant est alors forcément imaginaire, car $c-a < 0$. Interprétons pourtant le résultat. L'équation (14) exprime que la droite

$$\frac{x'}{\sqrt{b-c}} = \frac{y'}{\sqrt{c-a}} = \frac{z'}{\sqrt{a-b}}$$

est dans le plan π'

$$u'x' + v'y' + w'z' = 0$$

mené par l'origine parallèlement au plan π. Or quelle est cette droite? On a pour tous les points de cette droite

$$ax'^2+by'^2+cz'^2=0$$
$$x'^2+y'^2+z'^2=0$$

c'est donc une droite isotrope du cône directeur.

Ainsi l'équation (12) n'a ses racines égales qu'autant que le plan sécant est parallèle à l'une des droites isotropes tracées sur la surface S. Le plan π ne peut être réel qu'à la condition d'être parallèle à la fois à deux droites isotropes imaginaires conjuguées; mais alors le cône directeur est coupé par le plan π' suivant un cercle de rayon nul et le plan π coupe la surface S suivant un cercle. C'est ce qu'indique d'ailleurs la formule de décomposition de Δ en un produit de deux sommes de deux carrés.

Remarque II — On remarque que d'après la formule (16), α est nul si H est nul. Si H est nul les axes se réduisent à zéro; cela suffirait pour établir que dans ce cas le plan sécant touche la surface, si nous ne savions déjà que $H=0$ est l'équation tangentielle de la surface.

Remarque III — On peut obtenir sous une forme très simple l'équation de chaque axe pris individuellement. Soit S une racine de (12), α, β, γ l'axe correspondant, l'autre axe sera à l'intersection du plan π avec le plan

$$(13) \qquad \alpha f'_x+\beta f'_y+\gamma f'_z=0$$

diamétral conjugué de la direction des cordes α, β, γ.

En éliminant $\alpha, \beta, \gamma, \sigma$ entre les équations (10) et (15) on aura

$$(16) \quad \begin{vmatrix} A-S & B'' & B' & u \\ B'' & A-S & B & v \\ B' & B & A''-S & w \\ f'_x & f'_y & f'_z & 0 \end{vmatrix} = 0$$

équation qui, jointe à celle du plan π représente le second axe, c'est-à-dire celui qui correspondrait à l'autre racine S' de l'équation

(12). Cette forme est précieuse en ce qu'elle ne contient plus de traces des coordonnées x_0, y_0, z_0 du centre. Nous en tirerons parti dans le cas d'une section parabolique.

1°— On appliquera les formules au cas de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

et du plan

$$ux + vy + wz + p = 0$$

2°— Particularisant encore davantage on fera $p = 0$ et l'on cherchera le lieu de l'extrémité **M** du segment obtenu, en élevant au centre de chaque section diamétrale de la surface (centre de la surface) une perpendiculaire égale à l'un des demi axes de cette section.

Soient, X, Y, Z, les coordonnées du point M considéré; le plan sécant aura pour équation

$$Xx + Yy + Zz = 0 ;$$

on devra avoir de plus,

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = r^2$$

et r est donné par les équations (12) et (13). Mais on a $\frac{H}{\Phi} = -1$ eu égard à ce que le plan sécant passe par l'origine qui est le centre de la surface. On a donc $\lambda' = \frac{1}{r^2}$, et l'équation (12) donne après quelques réductions très faciles,

$$(a^2X^2 + b^2Y^2 + c^2Z^2)(X^2+Y^2+Z^2) - a^2(b^2+c^2)X^2 - b^2(c^2+a^2)Y^2 - c^2(a^2+b^2)Z^2 + a^2b^2c^2 = 0$$

ou encore si l'on veut

$$\frac{a^2X^2}{X^2+Y^2+Z^2-a^2} + \frac{b^2Y^2}{X^2+Y^2+Z^2-b^2} + \frac{c^2Z^2}{X^2+Y^2+Z^2-c^2} = 0$$

Cette surface est la célèbre surface des ondes.

3°— Autre application. La condition pour que la section par

un plan soit une hyperbole équilatère s'écrit ainsi :

$$\psi(u, v, w) = (A + A' + A'')(u^2 + v^2 + w^2) - \varphi(u, v, w) = 0$$

On l'obtient en exprimant que les deux racines de l'équation (15) sont égales et de signe contraire. Cette remarque met en évidence la propriété connue de l'invariant $A + A' + A''$; car si $A + A' + A'' = 0$, l'identité

$$\psi = -\varphi$$

prouve que tout plan normal à une des génératrices du cône $\varphi = 0$ mené par le sommet coupe le cône suivant deux droites rectangulaires.

Axe et paramètre
dans le cas de la Section parabolique (1).

Nous pouvons regarder la section parabolique comme la limite d'une section elliptique dont le centre s'éloigne indéfiniment. Soient a, b les demi axes de la section elliptique ; $a > b$, et S, S' les racines correspondantes de l'équation (12) on aura, d'après (13)

$$\phi S = -\frac{H}{a^2} \qquad \phi S' = -\frac{H}{b^2}$$

d'où en posant $K = \frac{b^2}{a}$, et tenant compte de (12)

$$K^2 = \frac{HS}{\phi S'^2} = \frac{HS'S}{\phi S'^3} = \frac{H}{(u^2 + v^2 + w^2) S'^3}.$$

Lorsque la section parabolique se trouve réalisée, la limite de K est précisément le paramètre de la parabole. La racine S' reste donc finie et différente de zero, mais il n'en est pas de même pour S

---

(1). J'indique la solution de cette question, malgré qu'elle ne doive pas figurer dans la leçon conformément au programme, qui spécifie que la section a un centre.

car

$$SS' = \frac{\Phi}{u^2+v^2+w^2}$$

tend vers zéro ; on a d'ailleurs

$$S+S' = A+A'+A'' - \frac{\varphi(u,v,w)}{u^2+v^2+w^2},$$

et à la limite, S étant nul

$$S' = A+A'+A'' - \frac{\varphi(u,v,w)}{u^2+v^2+w^2}$$

On a donc finalement

$$K = \frac{\sqrt{H}\ (u^2+v^2+w^2)}{[A+A'+A'')(u^2+v^2+w^2) - \varphi(u,v,w)]^{3/2}}$$

Quant à l'axe en position, la remarque III le fournit ; il suffit, dans la formule (16) d'introduire au lieu de S la valeur ci-dessus de S''.

On peut d'ailleurs vérifier que si dans l'équation (16) on introduit la valeur $S=0$ le plan représenté par cette équation est précisément parallèle au plan Π, en sorte que le second axe est rejeté à l'infini.

Les quadriques en coordonnées tangentielles

Soit $f(x,y,z,t) = A_{11}x^2 + A_{22}y^2 + A_{33}z^2 + A_{44}t^2 + 2A_{12}xy + 2A_{13}xz + 2A_{14}xt + 2A_{23}yz + A_{24}yt + 2A_{34}zt = 0$ l'équation ponctuelle d'une quadrique

L'équation

$$\phi(\xi,\eta,\zeta,\tau) = -\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & \xi \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & \eta \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & \zeta \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & \tau \\ \xi & \eta & \zeta & \tau & 0 \end{vmatrix} = 0$$

exprime que le plan ξ, η, ζ, τ touche la surface.

La surface est tout aussi bien définie par cette équation tangentielle que par l'équation ponctuelle. On passe aisément de l'une à l'autre.

Le plan tangent au point x', y', z', t' a pour équation

$$\frac{\partial f}{\partial x'} x + \frac{\partial f}{\partial y'} \cdot y + \frac{\partial f}{\partial z'} \cdot z + \frac{\partial f}{\partial t'} \cdot t = 0;$$

on peut donc poser, en désignant par ξ, η, ζ, τ les coordonnées de ce plan

$$(1) \quad \xi = \tfrac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x'}, \ \eta = \tfrac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial y'}, \ \zeta = \tfrac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial z'}, \ \tau = \tfrac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial t'};$$

et en éliminant x', y', z', t' entre cette équation et celle du plan

$$(2) \qquad \xi x' + \eta y' + \zeta z' + \tau t' = 0$$

on obtient précisément $\Phi = 0$.

On peut procéder de la manière suivante dans l'élimination. Soit Δ le discriminant de $f(x, y, z, t)$; a_{ik} le mineur correspondant à A_{ik}, on tirera des équations (1),

$$(3) \quad \begin{cases} \Delta x' = a_{11} \xi + a_{12} \cdot \eta + a_{13} \cdot \zeta + a_{14} \cdot \tau \\ \Delta \cdot y' = a_{21} \cdot \xi + a_{22} \cdot \eta + a_{23} \cdot \zeta + a_{24} \cdot \tau \\ \Delta \cdot z' = a_{31} \cdot \xi + a_{33} \cdot \eta + a_{23} \zeta + a_{34} \cdot \tau \\ \Delta \cdot t' = a_{41} \cdot \xi + a_{42} \cdot \eta + a_{43} \zeta + a_{44} \tau, \end{cases}$$

et en portant ces valeurs de x', y', z', t' dans (2) il viendra

$$\begin{aligned} 0 = \Delta (x' \xi + y' \eta + z' \zeta + t' \tau) = {} & a_{11} \xi^2 + a_{12} \eta^2 + a_{33} \zeta^2 + a_{44} \tau^2 \\ & + 2 a_{12} \xi \eta + 2 a_{13} \xi \zeta + 2 a_{14} \xi \tau + 2 a_{23} \eta \zeta \\ & + 2 a_{24} \eta \tau + 2 a_{34} \zeta \tau \end{aligned}$$

Or, si l'on développe le déterminant $\Phi(\xi, \eta, \zeta, \tau)$, on trouve précisément cette forme quadratique.

Les équations (3) ont l'avantage de faire connaître les coordonnées x', y', z', t' du point de contact lorsque le plan tangent ξ, η, ζ, τ est donné.

On remarquera que ces coordonnées sont proportionnelles, on peut dire égales, à

$$\frac{\partial \phi}{\partial \xi}, \frac{\partial \phi}{\partial \eta}, \frac{\partial \phi}{\partial \zeta}, \frac{\partial \phi}{\partial \tau}$$

Cherchons, plus généralement, le pôle d'un plan $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \tau_1$, non tangent. Ce pôle est l'enveloppe des plans tangents ξ, η, ζ, τ dont le point de contact est dans le plan $(\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \tau_1)$. Exprimons donc que le point de contact est dans ce plan. Nous aurons: $\xi_1 x' + \eta_1 y' + \zeta_1 z' + \tau_1 t' = 0$

ou, à cause des équations (3)

$$\xi_1 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \eta_1 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + \zeta_1 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \tau_1 \frac{\partial \phi}{\partial \tau} = 0$$

ce qui s'écrit,

$$\xi \frac{\partial \phi}{\partial \xi_1} + \eta \frac{\partial \phi}{\partial \eta_1} + \zeta \frac{\partial \phi}{\partial \xi_1} + \tau \frac{\partial \phi}{\partial \tau_1} = 0;$$

cette équation exprime que tous les plans tangents $\xi, \eta, \zeta; \tau$, dont le point de contact est dans le plan $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \tau_1$, vont passer au au point dont les coordonnées sont

$$\frac{\partial \phi}{\partial \xi_1}, \frac{\partial \phi}{\partial \eta_1}, \frac{\partial \phi}{\partial \zeta_1}, \frac{\partial \phi}{\partial \tau_1}$$

Ce point est donc le pôle du plan $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \tau_1$.

Centre de la Surface.

Supposons que $x = y = z = 0$ soient trois plans formant un triedre et $t = 0$ le plan de l'infini. Les coordonnées du plan de l'infini seront donc:

$$\xi_1 = 0 \quad \eta_1 = 0 \quad \zeta_1 = 0 \quad \tau_1 = 1$$

Le centre est le pôle du plan de l'infini ; il aura donc pour coordonnées.

$$x = a_{41} \qquad y = a_{42} \qquad z = a_{43} \qquad t = a_{44}$$

Ce centre est à distance finie tant que a_{44} est différent de zéro et à l'infini dans le cas contraire. Observons cependant que si a_{41}, a_{42}, a_{43}, a_{44} sont tous nuls le centre devient indéterminé. Dans ce cas, la variable t ne figure pas dans la forme ϕ. Nous reviendrons sur ce cas.

Dégénérescences projectives.

Avant de nous occuper des propriétés métriques, il convient en effet d'étudier les diverses sortes de quadriques auxquelles conduit la discussion de l'équation tangentielle, abstraction faite des propriétés métriques et en se plaçant simplement au point de vue de la décomposition en carrés. Les considérations que nous allons développer rentrent donc dans le domaine projectif, c'est à dire, qu'elles visent des propriétés qui restent inaltérées par des transformations linéaires effectuées sur les variables. Comme les résultats, pour le cas des quadriques en coordonnées ponctuelles, sont bien connus, il nous sera commode de ramener la discussion à ce cas par le procédé suivant. J'appelle Q la quadrique dont $\phi(\xi, \eta, \zeta, \tau) = 0$ est l'équation tangentielle. L'équation

$$\phi(x, y, z, t) = 0$$

est l'équation ponctuelle d'une quadrique R. Je vais montrer que R et Q sont polaires réciproques par rapport à la quadrique S,

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0 .$$

En effet, le pôle du plan (ξ, η, ζ, τ) par rapport à S a pour

coordonnées, $x=\xi$, $y=\eta$, $z=\zeta$, $t=\tau$; ainsi les coordonnées d'un plan et celles de son pôle par rapport à S sont identiques. De là résulte que l'équation $\phi(\xi,\eta,\zeta,\tau)=0$ qui exprime que le plan ξ,η,ζ,τ touche Q, exprime aussi que le pôle de ce plan par rapport à S décrit la surface polaire réciproque de Q, et comme $x=\xi$, $y=\eta$, $z=\zeta$, $t=\tau$ sont les coordonnées de ce pôle,

$$\phi(x,y,z,t)=0$$

est bien l'équation ponctuelle de cette polaire réciproque.

Pour discuter les formes de Q qui accompagnent les divers états de la fonction $\phi(\xi,\eta,\zeta,\tau)$, il suffira donc de traduire par polaires réciproques les formes de R correspondantes à $\phi(x,y,z,t)$.

Si la forme ϕ est réductible à quatre carrés, la quadrique R sera une quadrique générale et de même pour sa polaire réciproque Q.

Si ϕ est décomposable en deux carrés positifs et deux carrés négatifs (et si le tétraèdre de référence est réel) les génératrices rectilignes de R seront réelles. Il en sera de même pour celles de Q, polaires réciproques des premières. Dans tout cas contraire, les génératrices rectilignes seront imaginaires.

Si ϕ est réductible à trois carrés, R sera du genre cône et admettra un point double. Or, la polaire réciproque d'un cône est une conique. Donc l'équation $\phi(\xi,\eta,\zeta,\tau)=0$ exprime, dans ce cas, que le plan ξ,η,ζ,τ touche une certaine conique.

On dit quelquefois, dans ce cas, que la quadrique s'est infiniment aplatie. Nous aimons peu cette locution qui a l'inconvénient d'introduire des notions ponctuelles dans un cas de dégénérescence qui n'a sa raison d'être que dans la considération des plans tangents. Au point de vue ponctuel, nous n'avons plus de surface; nous n'avons plus qu'une courbe.

Si ϕ se réduit à deux carrés, la quadrique R se réduit à deux plans; l'équation $\phi(x,y,z,t)=0$ exprime que (x,y,z,t)

est un point pris dans l'un de ces deux plans. L'équation $\phi(\xi, \eta, \zeta, \tau) = 0$ exprime donc que le plan ξ, η, ζ, τ passe par l'un des deux points polaires réciproques de ces deux plans

On rencontre une singularité de même ordre dans le plan, quand on définit une conique par ses tangentes.

Si les deux carrés ont même signe, les points sont imaginaires conjugués; ils sont réels dans le cas contraire. Si, enfin ϕ est un carré parfait, R se réduit à un plan unique, et Q se réduit à un point unique.

Discussion métrique.

Je passe maintenant à la discussion des propriétés métriques

Supposons d'abord que le discriminant de ϕ ne soit pas nul, et que a_{44} ne soit pas nul non plus.

Nous aurons pour Q une quadrique à centre.

Notre surface sera un ellipsoïde réel ou imaginaire; un hyperboloïde réglé ou non réglé.

Il est facile de distinguer. Nous pourrons écrire, $\psi(\xi, \eta, \zeta)$ étant une forme quadratique,

$$\phi(\xi, \eta, \zeta, \tau) = \frac{1}{a_{44}} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \right)^2 + \psi(\xi, \eta, \zeta)$$

Supposons, ce qui est toujours permis, que a_{44} soit positif. ψ sera décomposable en trois carrés. S'ils sont tous positifs, la surface ne peut être qu'un ellipsoïde imaginaire. S'ils sont tous négatifs on a un ellipsoïde réel. En effet, il est clair d'abord que la surface possède alors des points réels. Je vais prouver en second lieu que son cône asymptotique est imaginaire. Les plans tangents menés par le centre vérifient l'équation :

$$a_{14}\xi + a_{24}\eta + a_{34}\zeta + a_{44}\tau = \frac{1}{2}\frac{\partial \phi}{\partial \tau} = 0$$

conformément aux valeurs trouvées pour les coordonnées de ce point. Les plans tangents issus du centre doivent donc vérifier l'équation

$$\psi(\xi, \eta, \zeta) = 0$$

Mais puisque ψ est une somme de carrés négatifs, ces plans tangents sont tous imaginaires. Puisqu'on ne peut mener à la surface aucun plan tangent réel par son centre, son cône asymptote est imaginaire, c'est donc bien un ellipsoïde réel.

Supposons maintenant que ψ contienne des carrés de signes contraires; alors l'équation

$$\psi = 0 ,$$

aura des solutions réelles; il y aura des plans tangents réels issus du centre. La surface sera un des deux hyperboloïdes. Pour savoir lequel, il suffit de regarder si la surface est réglée.

Si ψ contient un carré positif et deux négatifs, ϕ contient deux carrés positifs et deux négatifs; la surface paracide des droites réelles c'est un hyperboloïde à une nappe.

Ce sera au contraire un hyperboloïde à deux nappes si ψ contient un seul carré négatif.

Supposons maintenant que $a_{44} = 0$. Le centre est à l'infini. Le plan de l'infini touche la surface en ce point. La direction de l'axe sera donnée par

$$\frac{x}{a_{14}} = \frac{y}{a_{24}} = \frac{z}{a_{34}}$$

Le paraboloïde est-il elliptique ou hyperbolique? Il suffira de regarder si Q est réglée. Pour cela, on décomposera ϕ en carrés. S'il y en a deux positifs et deux négatifs on a un paraboloïde hyperbolique; elliptique dans tout autre cas.

On observera que l'hypothèse de a_{14}, a_{24}, a_{34}, nuls en même temps

que a_{44} rentre dans le cas réservé de $\Delta = 0$.

Examinons donc le cas où Δ serait nul. Si $\Delta = 0$, et si tous les mineurs du premier ordre ne sont pas nuls, la quadrique Q se réduit aux plans tangents d'une conique C. Si a_{44} n'est pas nul

$$a_{14}, a_{24}, a_{34}, a_{44}$$

seront les coordonnées du centre de cette conique. Cette conique sera-t-elle réelle ou imaginaire, elliptique ou hyperbolique ?

Écrivons encore dans l'hypothèse de $a_{44} \geq 0$ (et nous pouvons supposer $a_{44} > 0$).

$$\phi = \frac{1}{a_{44}} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \psi(\xi, \eta, \zeta)$$

Ici, ψ ne sera décomposable qu'en deux carrés puisque ϕ n'est décomposable qu'en trois.

Il y a trois cas :

1° — Si ψ est la somme de deux carrés positifs, la conique est imaginaire.

2° — Si les deux carrés de ψ sont négatifs, la conique est une ellipse.

En effet, on sort, comme plus haut, que dans ce cas, on ne peut lui mener de plan tangent par son centre.

3° — Enfin si les carrés de ψ sont de signes contraires, on peut mener à la conique des plans tangents réels par son centre, la courbe est une hyperbole.

Si, au contraire $a_{44} = 0$, la courbe est tangente au plan de l'infini, c'est une parabole, toujours réelle ; la direction de l'axe est la même que précédemment :

$$\frac{x}{a_{41}} = \frac{y}{a_{42}} = \frac{z}{a_{43}}$$

Cependant, ces équations perdent toute signification si a_{11}, a_{24}, a_{34} sont nuls ainsi que a_{44}.

C'est ce cas que nous avons précédemment laissé de côté. Mais alors ϕ ne dépend plus de τ et se réduit à une fonction de ξ, η, ζ. Si, d'ailleurs, on cherche les coordonnées du point de contact d'un plan tangent ξ, η, ζ, τ, on trouve

$$x' = \frac{\partial \phi}{\partial \xi}, \quad y' = \frac{\partial \phi}{\partial \eta}, \quad z' = \frac{\partial \phi}{\partial \zeta}, \quad t' = \frac{\partial \phi}{\partial \tau} = 0$$

donc le point de contact est à l'infini ; la conique toute entière est dans le plan de l'infini.

Elle est réelle ou imaginaire selon que les trois carrés en lesquels ϕ se décompose sont de signes contraires ou de même signe.

Examinons maintenant l'hypothèse où les mineurs du premier ordre de Δ seraient tous nuls, mais non pas tous ceux du second.

On aura alors un couple de points, car ϕ est une somme de deux carrés.

Si a_{44} n'est pas nul, on posera

$$\phi = \frac{1}{a_{44}} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \right)^2 + \psi(\xi, \eta, \zeta)$$

Ici ψ sera un carré parfait. Si ce carré est positif ainsi que a_{44}, les deux points sont imaginaires conjugués. Ils sont au contraire réels, si le carré égal à ψ est négatif, toujours dans l'hypothèse de $a_{44} > 0$

Ici encore a_{44} peut être nul. Un des deux points est alors à l'infini dans la direction

$$\frac{x}{a_{14}} = \frac{y}{a_{24}} = \frac{z}{a_{34}}$$

Si a_{14}, a_{24}, a_{34} et a_{44} sont nuls, on verra, comme précédemment à propos de la conique, que les deux points sont dans le

le plan de l'infini.

Enfin lorsque ϕ est un carré parfait on a un point unique qui est rejeté à l'infini si $a_{44}=0$; dans ce dernier cas l'hypothèse $a_{44}=0$ entraine $a_{14}=0$, $a_{24}=0$, $a_{34}=0$.

Résumé

$\Delta \neq 0$

- $a_{44} \gtrless 0$
  - ψ décomp. en 3 carrés positifs — Ellipsoïde imaginaire
  - ψ —"— —"— négatifs — —"— réel
  - ψ —"— en 2 positifs, 1 négatif — Hyperboloïde à 2 nappes
  - ψ —"— en 1 positif et 2 négatifs — —"— à 1 nappe
- $a_{44}=0$
  - ϕ —"— en 2 positifs et 2 négatifs — Paraboloïde hyperbolique
  - ϕ —"— 3 carrés de mêmes signes — —"— elliptique

$\Delta = 0$, mais tous les mineurs du 1er ordre ne sont pas nuls.

- $a_{44} \gtrless 0$
  - ψ décomp. en 2 carrés positifs — Ellipse imaginaire
  - ψ —"— —"— négatifs — —"— réelle
  - ψ —"— en 2 carrés de signes contraires — Hyperbole
- $a_{44}=0$
  - a_{14}, a_{24}, a_{34} non tous nuls — Parabole
  - $a_{14}=a_{24}=a_{34}=0$
    - ϕ se décompose en 3 carrés de mêmes signes — Conique imaginaire à l'infini.
    - ϕ se décompose en carrés de signes contraires — Conique réelle à l'infini

$\Delta = 0$ et tous les mineurs du premier ordre nuls, mais pas tous ceux du 2e

- $a_{44} \gtrless 0$
  - ψ est un carré positif — Deux points imaginaires
  - ψ —"— négatif — —"— réels
- $a_{44}=0$
  - a_{14}, a_{24}, a_{34} non tous nuls — Un point à l'infini et un à distance finie.
  - $a_{14}=a_{24}=a_{34}=0$ — Deux points à l'infini

$\Delta = 0$ et tous les mineurs du 1er et du 2e ordre sont nuls. ϕ est un carré parfait

- $a_{44} \gtrless 0$ ..... Un point à distance finie
- $a_{44}=0$ ..... —"—"— à l'infini

Ainsi au point de vue métrique, il y a 18 cas possibles.

Sur les nombres e et π.

Leçon rédigée par M. Tannery.

I On doit à M. Hermite[1] d'avoir établi que le nombre e est un nombre transcendant, c'est-à-dire qu'il ne peut être racine d'une équation algébrique entière à coefficients entiers. Sans insister sur l'importance de ce résultat, non plus que sur la profondeur de la méthode par laquelle l'illustre géomètre y est arrivé, il convient de faire observer que cette proposition a fait connaître le premier exemple certain d'un nombre transcendant. Depuis, M. Lindemann[2] a étendu l'analyse de M. Hermite au nombre π et a fourni ainsi la première preuve de l'impossibilité de la quadrature du cercle. M. Weierstrass[3] a repris la question et toujours en suivant la voie ouverte par M. Hermite, mais en n'utilisant qu'une partie des propositions qui lui sont dues, est parvenu à une démonstration d'un caractère très élémentaire, qui embrasse à la fois les nombres e et π, ainsi que diverses propositions plus générales, dues à M. Lindemann, dont je ne parlerai pas ici. M. Molk a donné une exposition très claire des recherches de M. Weierstrass[4]

---

[1] Sur la fonction exponentielle, Comptes rendus 1873. T. 77

[2] Über die Ludolph'sche Zahl, Mathematische Annalen T. XX

[3] Zu Lindemann's Abhandlung: Über die Ludolph'sche Zahl Sitzungsberichte der Akad. zu Berlin 1885.

[4] Exposition de la démonstration ..... Bulletin des Sciences Mathématiques, 2e série, T. XIV, 1890. Je dois remercier ici M. de Saint-Germain, doyen de la Faculté des Sciences de Caen, qui a bien voulu

un plan soit une hyperbole équilatère s'écrit ainsi :

$$\psi(u, v, w) = (A + A' + A'')(u^2 + v^2 + w^2) - \varphi(u, v, w) = 0$$

On l'obtient en exprimant que les deux racines de l'équation (15) sont égales et de signe contraire. Cette remarque met en évidence la propriété connue de l'invariant $A + A' + A''$; car si $A + A' + A'' = 0$, l'identité

$$\psi = -\varphi$$

prouve que tout plan normal à une des génératrices du cone $\varphi = 0$ mené par le sommet coupe le cone suivant deux droites rectangulaires.

Axe et paramètre
dans le cas de la Section parabolique (1).

Nous pouvons regarder la section parabolique comme la limite d'une section elliptique dont le centre s'éloigne indéfiniment. Soient a, b les demi axes de la section elliptique ; $a > b$, et S, S' les racines correspondantes de l'équation (12) on aura, d'après (13)

$$\phi S = -\frac{H}{a^2} \qquad \phi S' = -\frac{H}{b^2}$$

d'où en posant $K = \frac{b^2}{a}$, et tenant compte de (12)

$$K^2 = \frac{HS}{\phi S'^2} = \frac{HS'S}{\phi S'^3} = \frac{H}{(u^2 + v^2 + w^2) S'^3}$$

Lorsque la section parabolique se trouve réalisée, la limite de K est précisément le paramètre de la parabole. La racine S' reste donc finie et différente de zero, mais il n'en est pas de même pour S,

---

(1). J'indique la solution de cette question, malgré qu'elle ne doive pas figurer dans la leçon conformément au programme, qui spécifie que la section a un centre.

car

$$SS' = \frac{\Phi}{u^2+v^2+w^2}$$

tend vers zéro ; on a d'ailleurs

$$S+S' = A + A' + A'' - \frac{\varphi(u,v,w)}{u^2+v^2+w^2},$$

et à la limite, S' étant nul

$$S' = A + A' + A'' - \frac{\varphi(u,v,w)}{u^2+v^2+w^2}$$

On a donc finalement

$$K = \frac{\sqrt{H}\ (u^2+v^2+w^2)}{[A+A'+A'')(u^2+v^2+w^2) - \varphi(u,v,w)]^{3/2}}$$

Quant à l'axe en position, la remarque III le fournit : il suffit, dans la formule (16) d'introduire au lieu de S la valeur ci-dessus de S' :

On peut d'ailleurs vérifier que si dans l'équation (16) on introduit la valeur $S'=0$ le plan représenté par cette équation est précisément parallèle au plan Π, en sorte que le second axe est rejeté à l'infini.

Les quadriques en coordonnées tangentielles

Soit $f(x,y,z,t) = A_{11}x^2 + A_{22}y^2 + A_{33}z^2 + A_{44}t^2 + 2A_{12}xy + 2A_{13}xz + 2A_{14}xt + 2A_{23}yz + 2A_{24}yt + 2A_{34}zt = 0$ l'équation ponctuelle d'une quadrique

L'équation

$$\phi(\xi,\eta,\zeta,\tau) = -\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & \xi \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & \eta \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & \zeta \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & \tau \\ \xi & \eta & \zeta & \tau & 0 \end{vmatrix} = 0$$

exprime que le plan ξ, η, ζ, τ touche la surface.

La surface est tout aussi bien définie par cette équation tangentielle que par l'équation ponctuelle. On passe aisément de l'une à l'autre.

Le plan tangent au point x', y', z', t' a pour équation

$$\frac{\partial f}{\partial x'} x + \frac{\partial f}{\partial y'} \cdot y + \frac{\partial f}{\partial z'} \cdot z + \frac{\partial f}{\partial t'} \cdot t = 0;$$

on peut donc poser, en désignant par ξ, η, ζ, τ les coordonnées de ce plan

$$(1) \quad \xi = \tfrac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x'}, \ \eta = \tfrac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial y'}, \ \zeta = \tfrac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial z'}, \ \tau = \tfrac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial t'};$$

et en éliminant x', y', z', t' entre cette équation et celle du plan

$$(2) \qquad \xi x' + \eta y' + \zeta z' + \tau t' = 0$$

on obtient précisément $\phi = 0$.

On peut procéder de la manière suivante dans l'élimination Soit Δ le discriminant de $f(x, y, z, t)$; a_{ik} le mineur correspondant à A_{ik}, on tirera des équations (1),

$$(3) \quad \begin{cases} \Delta x' = a_{11} \xi + a_{12} \cdot \eta + a_{13} \cdot \zeta + a_{14} \cdot \tau \\ \Delta \cdot y' = a_{21} \cdot \xi + a_{22} \cdot \eta + a_{23} \cdot \zeta + a_{24} \cdot \tau \\ \Delta \cdot z' = a_{31} \cdot \xi + a_{33} \cdot \eta + a_{23} \zeta + a_{34} \cdot \tau \\ \Delta \cdot t' = a_{41} \cdot \xi + a_{42} \cdot \eta + a_{43} \zeta + a_{44} \tau, \end{cases}$$

et en portant ces valeurs de x', y', z', t' dans (2) il viendra

$$0 = \Delta (x' \xi + y' \eta + z' \zeta + t' \tau) = a_{11} \xi^2 + a_{12} \eta^2 + a_{33} \zeta^2 + a_{44} \tau^2$$
$$+ 2 a_{12} \xi \eta + 2 a_{13} \xi \zeta + 2 a_{14} \xi \tau + 2 a_{23} \eta \zeta$$
$$+ 2 a_{24} \eta \tau + 2 a_{34} \zeta \tau$$

Or, si l'on développe le déterminant $\phi(\xi, \eta, \zeta, \tau)$, on trouve précisément cette forme quadratique.

Les équations (3) ont l'avantage de faire connaître les coordonnées x', y', z', t' du point de contact lorsque le plan tangent ξ, η, ζ, τ est donné.

On remarquera que ces coordonnées sont proportionnelles, on peut dire égales, à

$$\frac{\partial \phi}{\partial \xi}, \frac{\partial \phi}{\partial \eta}, \frac{\partial \phi}{\partial \zeta}, \frac{\partial \phi}{\partial \tau}$$

Cherchons, plus généralement, le pôle d'un plan $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \tau_1$, non tangent. Ce pôle est l'enveloppe des plans tangents ξ, η, ζ, τ dont le point de contact est dans le plan $(\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \tau_1)$. Ecrivons donc que le point de contact est dans ce plan. Nous aurons: $\xi_1 x' + \eta_1 y' + \zeta_1 z' + \tau_1 t' = 0$

ou, à cause des équations (3)

$$\xi_1 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \eta_1 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + \zeta_1 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \tau_1 \frac{\partial \phi}{\partial \tau} = 0$$

ce qui s'écrit,

$$\xi \frac{\partial \phi}{\partial \xi_1} + \eta \frac{\partial \phi}{\partial \eta_1} + \zeta \frac{\partial \phi}{\partial \xi_1} + \tau \frac{\partial \phi}{\partial \tau_1} = 0;$$

cette équation exprime que tous les plans tangents $\xi, \eta, \zeta; \tau$, dont le point de contact est dans le plan $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \tau_1$, vont passer au au point dont les coordonnées sont

$$\frac{\partial \phi}{\partial \xi_1}, \frac{\partial \phi}{\partial \eta_1}, \frac{\partial \phi}{\partial \zeta_1}, \frac{\partial \phi}{\partial \tau_1}$$

Ce point est donc le pôle du plan $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \tau_1$.

Centre de la Surface.

Supposons que $x = y = z = 0$ soient trois plans formant un trièdre et $t = 0$ le plan de l'infini. Les coordonnées du plan de l'infini seront donc:

$$\xi_1 = 0 \quad \eta_1 = 0 \quad \zeta_1 = 0 \quad \tau_1 = 1$$

Le centre est le pôle du plan de l'infini ; il aura donc pour coordonnées.

$$x = a_{41} \qquad y = a_{42} \qquad z = a_{43} \qquad t = a_{44}$$

Ce centre est à distance finie tant que a_{44} est différent de zéro et à l'infini dans le cas contraire. Observons cependant que si a_{41}, a_{42}, a_{43}, a_{44} sont tous nuls le centre devient indéterminé. Dans ce cas, la variable t ne figure pas dans la forme ϕ. Nous reviendrons sur ce cas.

Dégénérescences projectives.

Avant de nous occuper des propriétés métriques, il convient en effet d'étudier les diverses sortes de quadriques auxquelles conduit la discussion de l'équation tangentielle, abstraction faite des propriétés métriques et en se plaçant simplement au point de vue de la décomposition en carrés. Les considérations que nous allons développer rentrent donc dans le domaine projectif, c'est à dire, qu'elles visent des propriétés qui restent inaltérées par des transformations linéaires effectuées sur les variables. Comme les résultats, pour le cas des quadriques en coordonnées ponctuelles, sont bien connus, il nous sera commode de ramener la discussion à ce cas par le procédé suivant. J'appelle Q la quadrique dont $\phi(\xi, \eta, \zeta, \tau) = 0$ est l'équation tangentielle. L'équation

$$\phi(x, y, z, t) = 0$$

est l'équation ponctuelle d'une quadrique R. Je vais montrer que R et Q sont polaires réciproques par rapport à la quadrique S,

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0 .$$

En effet, le pôle du plan (ξ, η, ζ, τ) par rapport à S a pour

coordonnées, $x=\xi$, $y=\eta$, $z=\zeta$, $t=\tau$; ainsi les coordonnées d'un plan et celles de son pôle par rapport à S sont identiques. De là résulte que l'équation $\phi(\xi,\eta,\zeta,\tau)=0$ qui exprime que le plan ξ,η,ζ,τ touche Q, exprime aussi que le pôle de ce plan par rapport à S décrit la surface polaire réciproque de Q, et comme $x=\xi$, $y=\eta$, $z=\zeta$, $t=\tau$ sont les coordonnées de ce pôle,

$$\phi(x,y,z,t)=0$$

est bien l'équation ponctuelle de cette polaire réciproque.

Pour discuter les formes de Q qui accompagnent les divers états de la fonction $\phi(\xi,\eta,\zeta,\tau)$, il suffira donc de traduire par polaires réciproques les formes de R correspondantes à $\phi(x,y,z,t)$.

Si la forme ϕ est réductible à quatre carrés, la quadrique R sera une quadrique générale et de même pour sa polaire réciproque Q.

Si ϕ est décomposable en deux carrés positifs et deux carrés négatifs (et si le tétraèdre de référence est réel) les génératrices rectilignes de R seront réelles. Il en sera de même pour celles de Q, polaires réciproques des premières. Dans tout cas contraire, les génératrices rectilignes seront imaginaires.

Si ϕ est réductible à trois carrés, R sera du genre cône et admettra un point double. Or, la polaire réciproque d'un cône est une conique. Donc l'équation $\phi(\xi,\eta,\zeta,\tau)=0$ exprime, dans ce cas, que le plan ξ,η,ζ,τ touche une certaine conique.

On dit quelquefois, dans ce cas, que la quadrique s'est infiniment aplatie. Nous aimons peu cette locution qui a l'inconvénient d'introduire des notions ponctuelles dans un cas de dégénérescence qui n'a sa raison d'être que dans la considération des plans tangents. Au point de vue ponctuel, nous n'avons plus de surface; nous n'avons plus qu'une courbe.

Si ϕ se réduit à deux carrés, la quadrique R se réduit à deux plans; l'équation $\phi(x,y,z,t)=0$ exprime que (x,y,z,t)

est un point pris dans l'un de ces deux plans. L'équation $\phi(\xi, \eta, \zeta, \tau) = 0$ exprime donc que le plan ξ, η, ζ, τ passe par l'un des deux points polaires réciproques de ces deux plans

On rencontre une singularité de même ordre dans le plan, quand on définit une conique par ses tangentes.

Si les deux carrés ont même signe, les points sont imaginaires conjugués; ils sont réels dans le cas contraire. Si, enfin ϕ est un carré parfait, R se réduit à un plan unique, et Q se réduit à un point unique.

Discussion métrique.

Je passe maintenant à la discussion des propriétés métriques

Supposons d'abord que le discriminant de ϕ ne soit pas nul, et que a_{44} ne soit pas nul non plus.

Nous aurons pour Q une quadrique à centre.

Notre surface sera un ellipsoïde réel ou imaginaire; un hyperboloïde réglé ou non réglé.

Il est facile de distinguer. Nous pourrons écrire, $\psi(\xi, \eta, \zeta)$ étant une forme quadratique,

$$\phi(\xi, \eta, \zeta, \tau) = \frac{1}{a_{44}} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \right)^2 + \psi(\xi, \eta, \zeta)$$

Supposons, ce qui est toujours permis, que a_{44} soit positif. ψ sera décomposable en trois carrés. S'ils sont tous positifs, la surface ne peut être qu'un ellipsoïde imaginaire. S'ils sont tous négatifs on a un ellipsoïde réel. En effet, il est clair d'abord que la surface possède alors des points réels. Je vais prouver en second lieu que son cône asymptotique est imaginaire. Les plans tangents menés par le centre vérifient l'équation :

$$a_{14}\xi + a_{24}\eta + a_{34}\zeta + a_{44}\tau = \frac{1}{2}\frac{\partial\phi}{\partial\tau} = 0$$

conformément aux valeurs trouvées pour les coordonnées de ce point. Les plans tangents issus du centre doivent donc vérifier l'équation

$$\psi(\xi, \eta, \zeta) = 0$$

Mais puisque ψ est une somme de carrés négatifs, ces plans tangents sont tous imaginaires. Puisqu'on ne peut mener à la surface aucun plan tangent réel par son centre, son cône asymptote est imaginaire, c'est donc bien un ellipsoïde réel.

Supposons maintenant que ψ contienne des carrés de signes contraires; alors l'équation

$$\psi = 0,$$

aura des solutions réelles; il y aura des plans tangents réels issus du centre. La surface sera un des deux hyperboloïdes. Pour savoir lequel, il suffit de regarder si la surface est réglée.

Si ψ contient un carré positif et deux négatifs, ϕ contient deux carrés positifs et deux négatifs; la surface possède des droites réelles c'est un hyperboloïde à une nappe.

Ce sera au contraire un hyperboloïde à deux nappes si ψ contient un seul carré négatif.

Supposons maintenant que $a_{44} = 0$. Le centre est à l'infini. Le plan de l'infini touche la surface en ce point. La direction de l'axe sera donnée par

$$\frac{x}{a_{14}} = \frac{y}{a_{24}} = \frac{z}{a_{34}}$$

Le paraboloïde est-il elliptique ou hyperbolique? Il suffira de regarder si Q est réglée. Pour cela, on décomposera ϕ en carrés. S'il y en a deux positifs et deux négatifs on a un paraboloïde hyperbolique; elliptique dans tout autre cas.

On observera que l'hypothèse de a_{14}, a_{24}, a_{34}, nuls en même temps

que a_{44} rentre dans le cas réservé de $\Delta = 0$.

Examinons donc le cas où Δ serait nul. Si $\Delta = 0$, et si tous les mineurs du premier ordre ne sont pas nuls, la quadrique Q se réduit aux plans tangents d'une conique C. Si a_{44} n'est pas nul

$$a_{14}, a_{24}, a_{34}, a_{44}$$

seront les coordonnées du centre de cette conique. Cette conique sera-t-elle réelle ou imaginaire, elliptique ou hyperbolique?

Écrivons encore dans l'hypothèse de $a_{44} \geq 0$ (et nous pouvons supposer $a_{44} > 0$).

$$\phi = \frac{1}{a_{44}} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \psi(\xi, \eta, \zeta)$$

Ici, ψ ne sera décomposable qu'en deux carrés puisque ϕ n'est décomposable qu'en trois.

Il y a trois cas:

1°— Si ψ est la somme de deux carrés positifs, la conique est imaginaire.

2°— Si les deux carrés de ψ sont négatifs, la conique est une ellipse.

En effet, on sait, comme plus haut, que dans ce cas, on ne peut lui mener de plan tangent par son centre.

3°— Enfin si les carrés de ψ sont de signes contraires, on peut mener à la conique des plans tangents réels par son centre, la courbe est une hyperbole.

Si, au contraire $a_{44} = 0$, la courbe est tangente au plan de l'infini, c'est une parabole, toujours réelle; la direction de l'axe est la même que précédemment:

$$\frac{x}{a_{41}} = \frac{y}{a_{42}} = \frac{z}{a_{43}}$$

Cependant, ces équations perdent toute signification si a_{11}, a_{14}, a_{34} sont nuls ainsi que a_{44}.

C'est ce cas que nous avons précédemment laissé de côté. Mais alors ϕ ne dépend plus de τ et se réduit à une fonction de ξ, η, ζ. Si, d'ailleurs, on cherche les coordonnées du point de contact d'un plan tangent ξ, η, ζ, τ, on trouve

$$x' = \frac{\partial \phi}{\partial \xi}, \quad y' = \frac{\partial \phi}{\partial \eta}, \quad z' = \frac{\partial \phi}{\partial \zeta}, \quad t' = \frac{\partial \phi}{\partial \tau} = 0$$

donc le point de contact est à l'infini ; la conique toute entière est dans le plan de l'infini.

Elle est réelle ou imaginaire selon que les trois carrés en lesquels ϕ se décompose sont de signes contraires ou de même signe.

Examinons maintenant l'hypothèse où les mineurs du premier ordre de Δ seraient tous nuls, mais non pas tous ceux du second.

On aura alors un couple de points, car ϕ est une somme de deux carrés.

Si a_{44} n'est pas nul, on posera

$$\phi = \frac{1}{a_{44}} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \right)^2 + \psi(\xi, \eta, \zeta)$$

Ici ψ sera un carré parfait. Si ce carré est positif ainsi que a_{44}, les deux points sont imaginaires conjugués. Ils sont au contraire réels, si le carré égal à ψ est négatif, toujours dans l'hypothèse de $a_{44} > 0$

Ici encore a_{44} peut être nul. Un des deux points est alors à l'infini dans la direction

$$\frac{x}{a_{14}} = \frac{y}{a_{24}} = \frac{z}{a_{34}}$$

Si a_{14}, a_{24}, a_{34} et a_{44} sont nuls, on verra, comme précédemment à propos de la conique, que les deux points sont dans le

le plan de l'infini.

Enfin lorsque ϕ est un carré parfait on a un point unique qui est rejeté à l'infini si $a_{44}=0$; dans ce dernier cas l'hypothèse $a_{44}=0$ entraine $a_{14}=0$, $a_{24}=0$, $a_{34}=0$.

Résumé

- $\Delta \neq 0$
  - $a_{44} \gtrless 0$
    - ψ décomp. en 3 carrés positifs — Ellipsoïde imaginaire
    - ψ —"— —"— négatifs — —"— réel
    - ψ —"— en 2 positifs, 1 négatif — Hyperboloïde à 2 nappes
    - ψ —"— en 1 positif et 2 négatifs — —"— à 1 nappe
  - $a_{44}=0$
    - ϕ —"— en 2 positifs et 2 négatifs — Paraboloïde hyperbolique
    - ϕ —"— 3 carrés de mêmes signes — —"— elliptique
- $\Delta=0$, mais tous les mineurs du 1er ordre ne sont pas nuls.
  - $a_{44} \gtrless 0$
    - ψ décomp. en 2 carrés positifs — Ellipse imaginaire
    - ψ —"— —"— négatifs — —"— réelle
    - ψ —"— en 2 carrés de signes contraires — Hyperbole
  - $a_{44}=0$
    - a_{14}, a_{24}, a_{34} non tous nuls — Parabole
    - $a_{14}=a_{24}=a_{34}=0$
      - ϕ se décompose en 3 carrés de mêmes signes — Conique imaginaire à l'infini.
      - ϕ se décompose en carrés de signes contraires — Conique réelle à l'infini
- $\Delta=0$ et tous les mineurs du premier ordre nuls, mais pas tous ceux du 2e
  - $a_{44} \gtrless 0$
    - ψ est un carré positif — Deux points imaginaires
    - ψ —"— négatif — —"— réels
  - $a_{44}=0$
    - a_{14}, a_{24}, a_{34} non tous nuls — Un point à l'infini et un à distance finie.
    - $a_{14}=a_{24}=a_{34}=0$ — Deux points à l'infini
- $\Delta=0$ et tous les mineurs du 1er et du 2e ordre sont nuls. ϕ est un carré parfait
  - $a_{44} > 0$ ..... Un point à distance finie
  - $a_{44}=0$ ..... —"—"— à l'infini

Ainsi au point de vue métrique, il y a 18 cas possibles.

Sur les nombres e et π.

Leçon rédigée par M. Tannery.

I On doit à M. Hermite[1] d'avoir établi que le nombre e est un nombre transcendant, c'est-à-dire qu'il ne peut être racine d'une équation algébrique entière à coefficients entiers. Sans insister sur l'importance de ce résultat, non plus que sur la profondeur de la méthode par laquelle l'illustre géomètre y est arrivé, il convient de faire observer que cette proposition a fait connaître le premier exemple certain d'un nombre transcendant. Depuis, M. Lindemann[2] a étendu l'analyse de Mr Hermite au nombre π et a fourni ainsi la première preuve de l'impossibilité de la quadrature du cercle. M. Weierstrass[3] a repris la question et toujours en suivant la voie ouverte par M. Hermite, mais en n'utilisant qu'une partie des propositions qui lui sont dues, est parvenu à une démonstration d'un caractère très élémentaire, qui embrasse à la fois les nombres e et π, ainsi que diverses propositions plus générales, dues à M. Lindemann, dont je ne parlerai pas ici. M. Molk a donné une exposition très claire des recherches de M. Weierstrass[4]

---

[1] Sur la fonction exponentielle, Comptes rendus 1873. T. 77

[2] Über die Ludolph'sche Zahl, Mathematische Annalen. T. XX

[3] Zu Lindemann's Abhandlung: Über die Ludolph'sche Zahl Sitzungsberichte der Akad. zu Berlin 1885.

[4] Exposition de la démonstration . . . . Bulletin des Sciences Mathématiques, 2e série, T. XIV, 1890. Je dois remercier ici M. de Saint-Germain, doyen de la Faculté des Sciences de Caen, qui a bien voulu

II Le point de départ de la 4e méthode de M. Hermite est dans la considération de polynômes $\phi(z)$ $\psi(z)$ liés par la relation

$$(1) \qquad \frac{d}{dz}\left[\phi(z)e^{-z}\right] + \psi(z)e^{-z} = 0 \ ,$$

ou par la relation équivalente

$$(2) \qquad \phi'(z) - \phi(z) + \psi(z) = 0 \ ^{1)} .$$

Les deux polynomes ϕ, ψ sont évidemment de même degré; si l'on désigne ce degré par p, on tire de cette relation, en prenant p fois les dérivées, et en ajoutant

$$(3) \qquad \phi(z) = \psi(z) + \psi'(z) + \ldots\ldots\ldots\ldots + \psi^{(p)}(z) ;$$

Inversement le polynôme $\phi(z)$ ainsi défini satisfait évidemment aux relations (2) et (1).

On conclut de là que les coefficients du polynome ϕ sont des fonctions linéaires à coefficients entiers des coefficients du polynome ψ; au surplus l'égalité (2) montre que si l'on suppose

$$\psi(z) = b_0 z^p + b_1 z^{p-1} + \ldots\ldots\ldots + b_p$$

$$\phi(z) = B_0 z^p + B_1 z^{p-1} + \ldots\ldots\ldots + B_p$$

on devra avoir

$$B_0 = b_0$$

$$B_i = (m - i + 1) B_{i-1} + b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

à propos de l'article de M. Molk écrire à la rédaction du Bulletin une lettre dont j'ai profité pour la rédaction du §VI du présent travail c'est aussi un passage de sa lettre sur le parti que l'on pouvait tirer de l'égalité (3) du §II qui m'a suggéré l'idée de faire reposer sur cette égalité l'exposition de la méthode de M. Weierstrass.

1) Ici et dans la suite, l'accent est employé comme signe de dérivation

et ces relations qui permettent de calculer de proche en proche les coefficients B mettent le même résultat en évidence.

On peut prévoir comme il suit le rôle des polynomes $\phi(z)$, $\varphi(z)$. Si l'on désigne par z_0, z_1 deux nombres réels quelconques, on aura, par la formule dite des accroissements finis, en vertu de la relation (1),

$$\phi(z_1)\,e^{-z_1} - \phi(z_0)\,e^{-z_0} = -\varphi(\xi)\,e^{-\xi}(z_1 - z_0) \tag{4}$$

ξ désigne un nombre compris entre z_0 et z_1 ; si l'on parvient à choisir le polynome $\varphi(z)$ de manière que le second membre soit très petit, en valeur absolue, il est clair que, si le nombre $\phi(z_0)$ n'est pas lui même très petit, la fraction

$$\frac{\phi(z_1)}{\phi(z_0)}$$

rationnelle ou z_0 et z_1 fournira une valeur approchée de

$$\frac{e^{z_1}}{e^{z_0}} = e^{z_1 - z_0},$$

en sorte qu'on pourra obtenir, par cette voie, quelque connaissance des puissances du nombre e ; on choisira toujours dans la suite pour les nombres z_0, z_1 des racines du polynome $\varphi(z)$ en sorte que d'une part on puisse espérer que, entre ces deux nombres, $\varphi(z)$ ne prenne pas de grandes valeurs et que, de l'autre, on n'ait pas besoin de connaître explicitement le polynome $\phi(z)$, et qu'il suffise d'avoir un moyen de calculer les valeurs qu'il prend pour les racines de $\varphi(z)$: il suffira par exemple de connaître un polynome congru à $\phi(z)$ suivant le module $\varphi(z)$ et, en particulier le reste de la division de $\phi(z)$ par $\varphi(z)$.

Pour établir le caractère transcendant du nombre e on n'a à considérer que des polynomes et des nombres réels et l'on peut sans aucun inconvénient, conserver l'équation (4) sous la forme qui lui a été donnée ; la proposition analogue, concernant le nombre π oblige d'introduire des nombres imaginaires ; on pourra alors, si l'on veut, conserver

l'équation (4) en introduisant dans le second membre, comme M. Darboux a appris à le faire, un facteur imaginaire dont le module est au plus égal à un : ξ représente alors un nombre imaginaire figuré, suivant les conventions habituelles, par un point situé sur le segment de droite qui joint les deux points dont les affixes sont z_0 et z_1 ; pour l'uniformité de l'écriture, au lieu de l'équation (4), j'emploierai la suivante qui joue le même rôle et où l'intégrale qui figure dans le second membre sera dans tous les cas, une intégrale rectiligne :

$$(5) \quad \dots\dots\dots\dots \phi(z_1)e^{-z_1} - \phi(z_0)e^{-z_0} = -\int_{z_0}^{z_1} \varphi(z)e^{-z}\,dz$$

L'introduction de l'intégrale définie, d'ailleurs, va nous permettre, comme on le verra dès le début du paragraphe suivant, d'obtenir, d'après M. Hermite, des propositions qui, tout en n'étant nullement nécessaires pour établir le caractère transcendant du nombre e, éclaireront la méthode qui sera suivie

III M. Hermite se sert, au début de son Mémoire, d'un polynome $\varphi(z)$ dont les racines sont mises en évidence : en désignant par z_1, $z_2 \dots z_n$ des nombres différents, dont aucun n'est nul, et par $\mu_1, \mu_2 \dots \mu_n$ des entiers positifs, écrivons ce polynome sous la forme

$$\varphi(z) = z^{\mu}(z - z_1 x)^{\mu_1}(z - z_2 x)^{\mu_2} \dots (z - z_n x)^{\mu_n} ;$$

le polynome correspondant $\phi(z)$ sera entier en x comme en z ; en prenant pour α l'un quelconque des nombres $1, 2, \dots n$ l'égalité (5) où l'on remplacera z_0 et z_1 par 0 et $z_\alpha x$ donnera

$$\phi(z_\alpha x)e^{-z_\alpha x} - \phi(0) = -\int_0^{z_\alpha x} e^{-z}\, z^{\mu}(z - z_1 x)^{\mu_1} \dots (z - z_n x)^{\mu_n};$$

en faisant dans le second membre le changement de variable tout indiqué

$$\zeta = \zeta_\alpha x^t$$

et en posant

$$M = \mu + \mu_1 + \ldots\ldots + \mu_n ,$$

le second membre prend la forme

$$- x^{M+1} z_\alpha{}^{\mu+\mu_\alpha+1} \int_0^1 e^{-z_\alpha x t} t^\mu (t-1)^{\mu_\alpha} (z_\alpha t - z_1)^{\mu_1} \ldots (z_\alpha t - z_n)^{\mu_n} dt$$

où il est presque inutile de prévenir que le facteur $(z_\alpha t - z_\alpha)^{\mu_\alpha}$ ne figure plus à son rang ; il est évident que l'intégrale peut être développée en une série convergente procédant suivant les puissances entières et positives de x, en sorte que la formule à laquelle nous parvenons,

$$e^{z_\alpha x} - \frac{\phi(z_\alpha x)}{\phi(0)} = x^{M+1} \frac{z_\alpha{}^{\mu+\mu_\alpha+1} e^{z_\alpha x}}{\phi(0)} \int_0^1 e^{-z_\alpha x t} t^\mu \ldots\ldots dt ,$$

montre que si l'on développe la fraction rationnelle en x

$$\frac{\phi(z_\alpha x)}{\phi(0)}$$

suivant les puissances ascendantes de x, ce développement coïncidera avec celui de $e^{z_\alpha x}$ jusqu'aux termes d'ordre M, inclusivement, en sorte qu'on parvient, par cette voie, à un système de fractions rationnelles de même dénominateur

$$\frac{\phi(z_1 x)}{\phi(0)}, \quad \frac{\phi(z_2 x)}{\phi(0)}, \ldots\ldots \frac{\phi(z_n x)}{\phi(0)}$$

qui, pour les petites valeurs de x représentent respectivement les fonctions

$$e^{z_1 x}, e^{z_2 x}, \ldots\ldots\ldots\ldots e^{z_n x}$$

aux termes près d'ordre $M+1$; M. Hermite montre sans peine qu'en prenant pour $\mu, \mu_1, \ldots \mu_n$ tous les systèmes de nombres entiers positifs

Le centre est le pôle du plan de l'infini ; il aura donc pour coordonnées.

$$x = a_{41} \qquad y = a_{42} \qquad z = a_{43} \qquad t = a_{44}$$

Ce centre est à distance finie tant que a_{44} est différent de zéro et à l'infini dans le cas contraire. Observons cependant que si a_{41}, a_{42}, a_{43}, a_{44} sont tous nuls le centre devient indéterminé. Dans ce cas, la variable t ne figure pas dans la forme ϕ. Nous reviendrons sur ce cas.

Dégénérescences projectives.

Avant de nous occuper des propriétés métriques, il convient en effet d'étudier les diverses sortes de quadriques auxquelles conduit la discussion de l'équation tangentielle, abstraction faite des propriétés métriques et en se plaçant simplement au point de vue de la décomposition en carrés. Les considérations que nous allons développer rentrent donc dans le domaine projectif, c'est à dire, qu'elles visent des propriétés qui restent inaltérées par des transformations linéaires effectuées sur les variables. Comme les résultats, pour le cas des quadriques en coordonnées ponctuelles, sont bien connus, il nous sera commode de ramener la discussion à ce cas par le procédé suivant. J'appelle Q la quadrique dont $\phi(\xi, \eta, \zeta, \tau) = 0$ est l'équation tangentielle. L'équation

$$\phi(x, y, z, t) = 0$$

est l'équation ponctuelle d'une quadrique R. Je vais montrer que R et Q sont polaires réciproques par rapport à la quadrique S,

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0$$

En effet, le pôle du plan (ξ, η, ζ, τ) par rapport à S a pour

coordonnées, $x=\xi$, $y=\eta$, $z=\zeta$, $t=\tau$; ainsi les coordonnées d'un plan et celles de son pôle par rapport à S sont identiques. De là résulte que l'équation $\phi(\xi,\eta,\zeta,\tau)=0$ qui exprime que le plan ξ,η,ζ,τ touche Q, exprime aussi que le pôle de ce plan par rapport à S décrit la surface polaire réciproque de Q, et comme $x=\xi$, $y=\eta$, $z=\zeta$, $t=\tau$ sont les coordonnées de ce pôle,

$$\phi(x,y,z,t)=0$$

est bien l'équation ponctuelle de cette polaire réciproque.

Pour discuter les formes de Q qui accompagnent les divers états de la fonction $\phi(\xi,\eta,\zeta,\tau)$, il suffira donc de traduire par polaires réciproques les formes de R correspondantes à $\phi(x,y,z,t)$.

Si la forme ϕ est réductible à quatre carrés, la quadrique R sera une quadrique générale et de même pour sa polaire réciproque Q.

Si ϕ est décomposable en deux carrés positifs et deux carrés négatifs (et si le tétraèdre de référence est réel) les génératrices rectilignes de R seront réelles. Il en sera de même pour celles de Q, polaires réciproques des premières. Dans tout autre cas contraire, les génératrices rectilignes seront imaginaires.

Si ϕ est réductible à trois carrés, R sera du genre cône et admettra un point double. Or, la polaire réciproque d'un cône est une conique. Donc l'équation $\phi(\xi,\eta,\zeta,\tau)=0$ exprime, dans ce cas, que le plan ξ,η,ζ,τ touche une certaine conique.

On dit quelquefois, dans ce cas, que la quadrique s'est infiniment aplatie. Nous aimons peu cette locution qui a l'inconvénient d'introduire des notions ponctuelles dans un cas de dégénérescence qui n'a sa raison d'être que dans la considération des plans tangents. Au point de vue ponctuel, nous n'avons plus de surface; nous n'avons plus qu'une courbe.

Si ϕ se réduit à deux carrés, la quadrique R se réduit à deux plans; l'équation $\phi(x,y,z,t)=0$ exprime que (x,y,z,t)

est un point pris dans l'un de ces deux plans. L'équation $\phi(\xi, \eta, \zeta, \tau) = 0$ exprime donc que le plan ξ, η, ζ, τ passe par l'un des deux points polaires réciproques de ces deux plans

On rencontre une singularité de même ordre dans le plan, quand on définit une conique par ses tangentes.

Si les deux carrés ont même signe, les points sont imaginaires conjugués; ils sont réels dans le cas contraire. Si, enfin ϕ est un carré parfait, R se réduit à un plan unique, et Q se réduit à un point unique.

Discussion métrique.

Je passe maintenant à la discussion des propriétés métriques

Supposons d'abord que le discriminant de ϕ ne soit pas nul, et que a_{44} ne soit pas nul non plus.

Nous aurons pour Q une quadrique à centre.

Notre surface sera un ellipsoïde réel ou imaginaire; un hyperboloïde réglé ou non réglé.

Il est facile de distinguer. Nous pourrons écrire, $\psi(\xi, \eta, \zeta)$ étant une forme quadratique,

$$\phi(\xi, \eta, \zeta, \tau) = \frac{1}{a_{44}} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \right)^2 + \psi(\xi, \eta, \zeta)$$

Supposons, ce qui est toujours permis, que a_{44} soit positif. ψ sera décomposable en trois carrés. S'ils sont tous positifs, la surface ne peut être qu'un ellipsoïde imaginaire. S'ils sont tous négatifs on a un ellipsoïde réel. En effet, il est clair d'abord que la surface possède alors des points réels. Je vais prouver en second lieu que son cône asymptotique est imaginaire. Les plans tangents menés par le centre vérifient l'équation :

$$a_{14}\xi + a_{24}\eta + a_{34}\zeta + a_{44}\tau = \frac{1}{2}\frac{\partial\phi}{\partial\tau} = 0$$

conformément aux valeurs trouvées pour les coordonnées de ce point. Les plans tangents issus du centre doivent donc vérifier l'équation

$$\psi(\xi\ \eta\ \zeta) = 0$$

Mais puisque ψ est une somme de carrés négatifs, ces plans tangents sont tous imaginaires. Puisqu'on ne peut mener à la surface aucun plan tangent réel par son centre, son cône asymptote est imaginaire, c'est donc bien un ellipsoïde réel.

Supposons maintenant que ψ contienne des carrés de signes contraires; alors l'équation

$$\psi = 0\ ,$$

aura des solutions réelles; il y aura des plans tangents réels issus du centre. La surface sera un des deux hyperboloïdes. Pour savoir lequel, il suffit de regarder si la surface est réglée.

Si ψ contient un carré positif et deux négatifs, ϕ contient deux carrés positifs et deux négatifs; la surface possède des droites réelles c'est un hyperboloïde à une nappe.

Ce sera au contraire un hyperboloïde à deux nappes si ψ contient un seul carré négatif.

Supposons maintenant que $a_{44} = 0$. Le centre est à l'infini. Le plan de l'infini touche la surface en ce point. La direction de l'axe sera donnée par

$$\frac{x}{a_{14}} = \frac{y}{a_{24}} = \frac{z}{a_{34}}$$

Le paraboloïde est-il elliptique ou hyperbolique? Il suffira de regarder si Q est réglée. Pour cela, on décomposera ϕ en carrés. S'il y en a deux positifs et deux négatifs on a un paraboloïde hyperbolique; elliptique dans tout autre cas.

On observera que l'hypothèse de a_{14}, a_{24}, a_{34}, nuls en même temps

que a_{44} rentre dans le cas réservé de $\Delta = 0$.

Examinons donc le cas où Δ serait nul. Si $\Delta = 0$, et si tous les mineurs du premier ordre ne sont pas nuls, la quadrique Q se réduit aux plans tangents d'une conique C. Si a_{44} n'est pas nul

$$a_{14}, a_{24}, a_{34}, a_{44}$$

seront les coordonnées du centre de cette conique. Cette conique sera-t-elle réelle ou imaginaire, elliptique ou hyperbolique?

Revenons encore dans l'hypothèse de $a_{44} \geq 0$ (et nous pouvons supposer $a_{44} > 0$).

$$\phi = \frac{1}{a_{44}} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \psi(\xi, \eta, \zeta)$$

Ici, ψ ne sera décomposable qu'en deux carrés puisque ϕ n'est décomposable qu'en trois.

Il y a trois cas:

1°— Si ψ est la somme de deux carrés positifs, la conique est imaginaire.

2°— Si les deux carrés de ψ sont négatifs, la conique est une ellipse.

En effet, on sait, comme plus haut, que dans ce cas, on ne peut lui mener de plan tangent par son centre.

3°— Enfin si les carrés de ψ sont de signes contraires, on peut mener à la conique des plans tangents réels par son centre, la courbe est une hyperbole.

Si, au contraire $a_{44} = 0$, la courbe est tangente au plan de l'infini, c'est une parabole, toujours réelle; la direction de l'axe est la même que précédemment:

$$\frac{x}{a_{41}} = \frac{y}{a_{42}} = \frac{z}{a_{43}}$$

Cependant, ces équations perdent toute signification si a_{14}, a_{24}, a_{34} sont nuls ainsi que a_{44}.

C'est ce cas que nous avons précédemment laissé de côté. Mais alors ϕ ne dépend plus de τ et se réduit à une fonction de ξ, η, ζ. Si, d'ailleurs, on cherche les coordonnées du point de contact d'un plan tangent ξ, η, ζ, τ, on trouve

$$x' = \frac{\partial \phi}{\partial \xi}, \quad y' = \frac{\partial \phi}{\partial \eta}, \quad z' = \frac{\partial \phi}{\partial \zeta}, \quad t' = \frac{\partial \phi}{\partial \tau} = 0$$

donc le point de contact est à l'infini ; la conique toute entière est dans le plan de l'infini.

Elle est réelle ou imaginaire selon que les trois carrés en lesquels ϕ se décompose sont de signes contraires ou de même signe.

Examinons maintenant l'hypothèse où les mineurs du premier ordre de Δ seraient tous nuls, mais non pas tous ceux du second.

On aura alors un couple de points, car ϕ est une somme de deux carrés.

Si a_{44} n'est pas nul, on posera

$$\phi = \frac{1}{a_{44}} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \right)^2 + \psi(\xi, \eta, \zeta)$$

Ici ψ sera un carré parfait. Si ce carré est positif ainsi que a_{44}, les deux points sont imaginaires conjugués. Ils sont au contraire réels, si le carré égal à ψ est négatif, toujours dans l'hypothèse de $a_{44} > 0$

Ici encore a_{44} peut être nul. Un des deux points est alors à l'infini dans la direction

$$\frac{x}{a_{14}} = \frac{y}{a_{24}} = \frac{z}{a_{34}}$$

Si a_{14}, a_{24}, a_{34} et a_{44} sont nuls, on verra, comme précédemment à propos de la conique, que les deux points sont dans le

le plan de l'infini.

Enfin lorsque ϕ est un carré parfait on a un point unique qui est rejeté à l'infini si $a_{44}=0$; dans ce dernier cas l'hypothèse $a_{44}=0$ entraine $a_{14}=0$, $a_{24}=0$, $a_{34}=0$.

Résumé

- $\Delta \neq 0$
  - $a_{44} \gtrless 0$
    - ψ décomp. en 3 carrés positifs — Ellipsoïde imaginaire
    - ψ —"— —"— négatifs — —"— réel
    - ψ —"— en 2 positifs, 1 négatif — Hyperboloïde à 2 nappes
    - ψ —"— en 1 positif et 2 négatifs — —"— à 1 nappe
  - $a_{44}=0$
    - ϕ —"— en 2 positifs et 2 négatifs — Paraboloïde hyperbolique
    - ϕ —"— 3 carrés de mêmes signes — —"— elliptique
- $\Delta=0$, mais tous les mineurs du 1er ordre ne sont pas nuls.
  - $a_{44} \gtrless 0$
    - ψ décomp. en 2 carrés positifs — Ellipse imaginaire
    - ψ —"— —"— négatifs — —"— réelle
    - ψ —"— en 2 carrés de signes contraires — Hyperbole
  - $a_{44}=0$
    - a_{14}, a_{24}, a_{34} non tous nuls — Parabole
    - $a_{14}=a_{24}=a_{34}=0$
      - ϕ se décompose en 3 carrés de mêmes signes — Conique imaginaire à l'infini.
      - ϕ se décompose en carrés de signes contraires — Conique réelle à l'infini
- $\Delta=0$ et tous les mineurs du premier ordre nuls, mais pas tous ceux du 2e
  - $a_{44} \gtrless 0$
    - ψ est un carré positif — Deux points imaginaires
    - ψ —"— négatif — —"— réels
  - $a_{44}=0$
    - a_{14}, a_{24}, a_{34} non tous nuls — Un point à l'infini et un à distance finie.
    - $a_{14}=a_{24}=a_{34}=0$ — Deux points à l'infini
- $\Delta=0$ et tous les mineurs du 1er et du 2e ordre sont nuls. ϕ est un carré parfait
  - $a_{44} \gtrless 0$ ..... Un point à distance finie
  - $a_{44}=0$ ..... —"—"— à l'infini

Ainsi au point de vue métrique, il y a 18 cas possibles.

Sur les nombres e et π.

Leçon rédigée par M. Tannery.

I On doit à M. Hermite[1] d'avoir établi que le nombre e est un nombre transcendant, c'est-à-dire qu'il ne peut être racine d'une équation algébrique entière à coefficients entiers. Sans insister sur l'importance de ce résultat, non plus que sur la profondeur de la méthode par laquelle l'illustre géomètre y est arrivé, il convient de faire observer que cette proposition a fait connaître le premier exemple certain d'un nombre transcendant. Depuis, M. Lindemann[2] a étendu l'analyse de M. Hermite au nombre π et a fourni ainsi la première preuve de l'impossibilité de la quadrature du cercle. M. Weierstrass[3] a repris la question et toujours en suivant la voie ouverte par M. Hermite, mais en n'utilisant qu'une partie des propositions qui lui sont dues, est parvenu à une démonstration d'un caractère très élémentaire, qui embrasse à la fois les nombres e et π, ainsi que diverses propositions plus générales, dues à M. Lindemann, dont je ne parlerai pas ici. M. Molk a donné une exposition très claire des recherches de M. Weierstrass[4]

---

[1] Sur la fonction exponentielle, Comptes rendus 1873. T. 77

[2] Über die Ludolph'sche Zahl, Mathematische Annalen. T. XX

[3] Zu Lindemann's Abhandlung: Über die Ludolph'sche Zahl Sitzungsberichte der Akad. zu Berlin 1885.

[4] Exposition de la démonstration..... Bulletin des Sciences Mathématiques, 2e série, T. XIV, 1890. Je dois remercier ici M. de Saint-Germain, doyen de la Faculté des Sciences de Caen, qui a bien voulu

II Le point de départ de la 4e méthode de M. Hermite est dans la considération de polynômes $\Phi(z)$ $\varphi(z)$ liés par la relation

$$(1) \qquad \frac{d}{dz}\left[\Phi(z)e^{-z}\right] + \varphi(z)e^{-z} = 0 \ ,$$

ou par la relation équivalente

$$(2) \qquad \Phi'(z) - \Phi(z) + \varphi(z) = 0 \ ^{(1)} .$$

Les deux polynomes Φ, φ sont évidemment de même degré; si l'on désigne ce degré par p, on tire de cette relation, en prenant p fois les dérivées, et en ajoutant

$$(3) \qquad \Phi(z) = \varphi(z) + \varphi'(z) + \ldots\ldots\ldots\ldots + \varphi^{(p)}(z);$$

Inversement le polynôme $\Phi(z)$ ainsi défini satisfait évidemment aux relations (2) et (1).

On conclut de là que les coefficients du polynome Φ sont des fonctions linéaires à coefficients entiers des coefficients du polynome φ; au surplus l'égalité (2) montre que si l'on suppose

$$\varphi(z) = b_0 z^p + b_1 z^{p-1} + \ldots\ldots\ldots + b_p$$

$$\Phi(z) = B_0 z^p + B_1 z^{p-1} + \ldots\ldots\ldots + B_p$$

on devra avoir

$$B_0 = b_0$$

$$B_i = (m - i + 1) B_{i-1} + b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

à propos de l'article de M. Molk écrire à la rédaction du Bulletin une lettre dont j'ai profité pour la rédaction du §VI du présent travail c'est aussi un passage de sa lettre sur le parti que l'on pouvait tirer de l'égalité (3) du §II qui m'a suggéré l'idée de faire reposer sur cette égalité l'exposition de la méthode de M. Weierstrass.

(1) Ici et dans la suite, l'accent est employé comme signe de dérivation

et ces relations qui permettent de calculer de proche en proche les coefficients B mettent le même résultat en évidence.

On peut prévoir comme il suit le rôle des polynomes $\phi(z)$, $\varphi(z)$: Si l'on désigne par z_0, z_1 deux nombres réels quelconques, on aura, par la formule dite des accroissements finis, en vertu de la relation (1),

$$\phi(z_1)\,e^{-z_1} - \phi(z_0)\,e^{-z_0} = -\varphi(\xi)\,e^{-\xi}(z_1 - z_0) \tag{4}$$

ξ désigne un nombre compris entre z_0 et z_1; si l'on parvient à choisir le polynome $\varphi(z)$ de manière que le second membre soit très petit, en valeur absolue, il est clair que, si le nombre $\phi(z_0)$ n'est pas lui même très petit, la fraction

$$\frac{\phi(z_1)}{\phi(z_0)}$$

rationnelle ou z_0 et z_1 fournira une valeur approchée de

$$\frac{e^{z_1}}{e^{z_0}} = e^{z_1 - z_0},$$

en sorte qu'on pourra obtenir, par cette voie, quelque connaissance des puissances du nombre e; on choisira toujours dans la suite pour les nombres z_0, z_1 des racines du polynome $\varphi(z)$ en sorte que d'une part on puisse espérer que, entre ces deux nombres, $\varphi(z)$ ne prenne pas de grandes valeurs et que, de l'autre, on n'ait pas besoin de connaître explicitement le polynome $\phi(z)$, et qu'il suffise d'avoir un moyen de calculer les valeurs qu'il prend pour les racines de $\varphi(z)$: il suffira par exemple de connaître un polynome congru à $\phi(z)$ suivant le module $\varphi(z)$ et, en particulier le reste de la division de $\phi(z)$ par $\varphi(z)$.

Pour établir le caractère transcendant du nombre e on n'a à considérer que des polynomes et des nombres réels et l'on peut sans aucun inconvénient, conserver l'équation (4) sous la forme qui lui a été donnée; la proposition analogue, concernant le nombre π oblige d'introduire des nombres imaginaires; on pourra alors, si l'on veut, conserver

l'équation (4) en introduisant dans le second membre, comme M. Darboux a appris à le faire, un facteur imaginaire dont le module est au plus égal à un : ξ représente alors un nombre imaginaire figuré, suivant les conventions habituelles, par un point situé sur le segment de droite qui joint les deux points dont les affixes sont z_0 et z_1 ; pour l'uniformité de l'écriture, au lieu de l'équation (4), j'emploierai la suivante qui joue le même rôle et où l'intégrale qui figure dans le second membre sera dans tous les cas, une intégrale rectiligne :

$$(5) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \phi(z_1)e^{-z_1} - \phi(z_0)e^{-z_0} = -\int_{z_0}^{z_1} \varphi(z)e^{-z}\,dz$$

L'introduction de l'intégrale définie, d'ailleurs, va nous permettre, comme on le verra dès le début du paragraphe suivant, d'obtenir, d'après M. Hermite, des propositions qui, tout en n'étant nullement nécessaires pour établir le caractère transcendant du nombre e, éclaireront la méthode qui sera suivie

III M. Hermite se sert, au début de son Mémoire, d'un polynome $\varphi(z)$ dont les racines sont mises en évidence : en désignant par z_1, $z_2 \ldots z_n$ des nombres différents, dont aucun n'est nul, et par $\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_n$ des entiers positifs, écrivons ce polynome sous la forme

$$\varphi(z) = z^{\mu}(z-z_1x)^{\mu_1}(z-z_2x)^{\mu_2}\ldots(z-z_nx)^{\mu_n} ;$$

le polynome correspondant $\phi(z)$ sera entier en x comme en z ; en prenant pour α l'un quelconque des nombres $1, 2, \ldots n$ l'égalité (5) où l'on remplacera z_0 et z_1 par 0 et $z_\alpha x$ donnera

$$\phi(z_\alpha x)e^{-z_\alpha x} - \phi(0) = -\int_0^{z_\alpha x} e^{-z}\, z^{\mu}(z-z_1x)^{\mu_1}\ldots(z-z_nx)^{\mu_n}\,dz$$

en faisant dans le second membre le changement de variable tout indiqué

$$\zeta = z_\alpha x\, t$$

et en posant

$$M = \mu + \mu_1 + \ldots\ldots + \mu_n ,$$

le second membre prend la forme

$$- x^{M+1} z_\alpha{}^{\mu+\mu_\alpha+1} \int_0^1 e^{-z_\alpha x t}\, t^\mu (t-1)^{\mu_\alpha} (z_\alpha t - z_1)^{\mu_1} \ldots (z_\alpha t - z_n)^{\mu_n} dt$$

où il est presque inutile de prévenir que le facteur $(z_\alpha t - z_\alpha)^{\mu_\alpha}$ ne figure plus à son rang ; il est évident que l'intégrale peut être développée en une série convergente procédant suivant les puissances entières et positives de x, en sorte que la formule à laquelle nous parvenons,

$$e^{z_\alpha x} - \frac{\phi(z_\alpha x)}{\phi(0)} = x^{M+1} \frac{z_\alpha{}^{\mu+\mu_\alpha+1} e^{z_\alpha x}}{\phi(0)} \int_0^1 e^{-z_\alpha x t}\, t^\mu \ldots\ldots dt ,$$

montre que si l'on développe la fraction rationnelle en x

$$\frac{\phi(z_\alpha x)}{\phi(0)}$$

suivant les puissances ascendantes de x, ce développement coïncidera avec celui de $e^{z_\alpha x}$ jusqu'aux termes d'ordre M, inclusivement, en sorte qu'on parvient, par cette voie, à un système de fractions rationnelles de même dénominateur

$$\frac{\phi(z_1 x)}{\phi(0)}, \quad \frac{\phi(z_2 x)}{\phi(0)}, \ldots\ldots \frac{\phi(z_n x)}{\phi(0)}$$

qui, pour les petites valeurs de x représentent respectivement les fonctions

$$e^{z_1 x}, e^{z_2 x}, \ldots\ldots\ldots\ldots e^{z_n x}$$

aux termes près d'ordre $M+1$; M. Hermite montre sans peine qu'en prenant pour $\mu, \mu_1, \ldots \mu_n$ tous les systèmes de nombres entiers positifs

dont la somme est M, on obtient tous les systèmes possibles de fractions rationnelles qui représentent, à cet ordre près, les fonctions exponentielles qui précèdent.

Sans insister autrement sur ces résultats si importants, je me bornerai à développer l'une des applications que l'illustre géomètre fait de sa méthode, en supposant

$$\varphi(z) = z^m (a - z)^m;$$

m désigne un entier positif; on a alors

$$\varphi(a)\, e^{-a} - \phi(0) = -\int_0^a z^m (a - z)^m e^{-z}\, dz$$

et l'on a besoin de calculer, pour $z = 0$ et $z = a$, les valeurs de $\phi(z)$, ou, en vertu de l'égalité (3) des dérivées de $\varphi(z)$; on n'a à considérer que celles de ces dérivées qui sont d'ordre au moins égal à m; or la formule du binome donne

$$z^m (a - z)^m = a^m z^m + \ldots + (-1)^p \binom{m}{p} a^{m-p} z^{m+p} + \ldots$$
$$= a^m (a - z)^m + \ldots + (-1)^p \binom{m}{p} a^{m-p} (a - z)^{m+p} + \ldots$$

en supposant

$$\binom{m}{p} = \frac{1.2 \ldots m}{1.2 \ldots p \times 1.2 \ldots (m - p)};$$

On déduit de là immédiatement les valeurs pour $z = 0$, $z = a$ de la dérivée $(m+p)^{\text{ième}}$; on voit, en effet que pour ces valeurs, il n'y a, dans le développement de la dérivée qu'un terme qui ne s'annule pas et l'on trouve

$$\left[\frac{d^{m+p}\varphi(z)}{dz^{m+p}}\right]_{z=0} = (-1)^p\, 1.2 \ldots m\, A_{m,p}\, a^{m-p}.$$

$$\left[\frac{d^{m+p}\varphi(z)}{dz^{m+p}}\right]_{z=a} = (-1)^m\, 1.2 \ldots m\, A_{m,p}\, a^{m-p};$$

$A_{m,p}$ est un entier positif défini par la formule

$$A_{m,p} = \frac{(m-p+1)(m-p+2)\ldots(m+1)}{1.2\ldots p}.$$

Si l'on pose maintenant

$$Q_m(a) = \frac{\phi(o)}{1.2\ldots m} = a^m - A_{m,1}\, a^{m-1} + A_{m,2}\, a^{m-2} - \ldots.$$

(8) $$P_m(a) = Q_m(-a) = \frac{\phi(a)}{1.2\ldots m} = (-1)^m \left(a^m + A_{m,1}\, a^{m-1} + A_{m,2}\, a^{m-2} + \ldots\right.$$

l'équation (7) pourra être remplacée par la suivante

$$P_m(a)\, e^{-a} - Q_m(a) = -\frac{1}{1.2\ldots m}\int_o^a e^{-z} z^m (a-z)^m dz;$$

ou

(9) . . . . . $$Q_m(a)\, e^{a} - P_m(a) = \frac{e^a}{1.2\ldots m}\int_o^a e^{-z} z^m (a-z)^m dz;$$

dans cette égalité $P_m(a)$, $Q_m(a)$ sont des polynomes entiers en a dont la forme est connue par ce qui précède : on a ainsi

$$Q_0 = 1$$

$$Q_1 = a - 2$$

$$Q_2 = a^2 - 6a + 12$$

$$Q_3 = a^3 - 12\, a^2 + 60\, a - 120$$

$$Q_4 = a^4 - 20\, a^3 + 180\, a^2 - 840\, a + 1680$$

. . . . . .

Il est bien aisé de voir que le second membre de l'égalité (9) tend vers zéro quand m augmente indéfiniment. Supposons, par exemple que a soit réel et positif ; le produit $z(a-z)$ quand z varie entre

et a, reste inférieur à $\frac{a^2}{4}$; en sorte que le second membre, qui est assurément positif, est moindre que

$$\frac{e^a \left(\frac{a^2}{4}\right)^m a}{1.2.\ldots\ldots m},$$

et l'on peut déterminer m de manière que cette quantité soit plus petite que tel nombre positif ε que l'on voudra.

Il résulte de là que toutes les puissances entières de e sont incommensurables, en effet si a étant un nombre entier, on avait, en désignant par p et q des nombres entiers

$$e^a = \frac{p}{q}$$

le premier membre de l'égalité (9), après avoir été multiplié par q deviendrait un nombre entier ; ce nombre ne pourrait être nul, puisque le second membre est essentiellement positif ; d'un autre côté, on vient de montrer que le second membre peut être supposé aussi petit qu'on le veut ; la contradiction est manifeste.

Rappelons encore que M. Hermite a tiré aussi de l'égalité (9), ou de celle-ci, qui s'en déduit en faisant $z = at$.

$$Q_m(a)\, e^a - P_m(a) = \frac{e^a a^{2m+1}}{1.2\ldots m} \int_0^1 t^m (1-t)^m e^{-at}\, dt$$

une démonstration simple de l'irrationnalité de π^2 : Si l'on y suppose en effet m pair et qu'on y remplace a par $i\pi$, elle devient

$$Q_m(\pi i) + P_m(\pi i) = \frac{(-1)^m \pi^{2m+1} i}{1.2\ldots\ldots m} \int_0^1 t^m (1-t)^m (\cos \pi t - i \sin \pi t)\, dt.$$

Puisque $P_m(a)$ est égal à $Q_m(-a)$, le premier membre est une fonction entière, à coefficients entiers, de π^2, de degré $\frac{m}{2}$; le second membre doit se réduire à sa partie réelle, c'est-à-dire à

$$\frac{(-1)^m \pi^{2m+1}}{1.2.\ldots.m} \int_0^1 t^m (1-t)^m \sin \pi t \, dt :$$

or si π était une fraction $\frac{p}{q}$ à termes entiers, la quantité

$$Q_m(\pi i) + P_m(\pi i)$$

pourrait se mettre sous la forme $\frac{N}{q^{\frac{m}{2}}}$, en désignant par N un nombre entier ; on aurait donc

$$(-1)^m N = \frac{\pi^{2m+1} q^{\frac{m}{2}}}{1.2.\ldots.m} \int_0^1 t^m (1-t)^m \sin \pi t \, dt$$

ce qui est impossible, puisque le second membre est essentiellement positif, qu'il peut être pris aussi petit qu'on le veut, et que le premier est entier.

Je me contente d'énoncer, à titre d'exercice, les propositions suivantes, dont la démonstration est aisée.

Pour les petites valeurs de a, la fraction

$$\frac{P_m(a)}{Q_m(a)}$$

représente e^a aux termes d'ordre $2m+1$ près.

Trois polynomes consécutifs $Q_n(a)$, $Q_{n-1}(a)$, $Q_{n-2}(a)$ sont liés par la relation

$$Q_n(a) = -(4n-2) Q_{n-1}(a) + a^2 Q_{n-2}(a) ;$$

les polynomes $P_m(a)$ obéissent à la même loi de récurrence. Il est aisé de déduire de là la fraction continue par laquelle Lambert a montré qu'on pouvait représenter e^a ; nous la retrouverons plus tard cette fraction.

L'équation

$$Q_m(a) = 0$$

a ses racines imaginaires quand m est pair ; elle n'admet qu'une

racine réelle quand m est impair.

IV La méthode de M. Weierstrass, que je vais exposer maintenant consiste essentiellement, en partant d'un polynome à racines inégales

(10) . . . . . $f(z) = a_0 z^{n+1} + a_1 z^n + \ldots\ldots + a_{n+1}$,

à considérer à la fois les divers polynomes ϕ que l'on obtient en prenant pour le polynome φ les expressions

$$f^m(z),\ z f^m(z),\ z^2 f^m(z),\ \ldots,\ z^n f^m(z)$$

m est, bien entendu un entier positif, et $f^m(z)$ désigne la puissance $m^{ième}$ de $f(z)$.

Enfin, comme on ne substituera jamais, dans les polynomes $\Phi(z)$ que des racines de $f(z)$, on pourra remplacer ces polynomes $\Phi(z)$ par d'autre qui leur seront respectivement congrus suivant le module $f(z)$.

Si l'on suppose que l'on ait, en désignant par β l'un des nombres $0, 1, 2, \ldots n$

$$\frac{d}{dz}\left(\Phi(z) e^{-z}\right) + z^\beta f^m(z) e^{-z} = 0$$

ou

$$\Phi(z) = z^\beta f^m + \frac{d}{dz}\left(z^\beta f^m\right) + \frac{d^2}{dz^2}\left(z^\beta f^m\right) + \ldots$$

et si l'on se borne à chercher un polynome congru à $\phi(z)$ suivant le module $f(z)$, on aperçoit quelques simplifications qui ont déjà été mises en évidence dans l'application précédente : toutes les dérivées d'ordre inférieur à m qui figurent dans le second membre contiennent f en facteur ; en sorte que le polynome

$$\Psi(z) = \frac{d^m}{dz^m}\left(z^\beta f^m\right) + \frac{d^{m+1}}{dz^{m+1}}\left(z^\beta f^m\right) + \frac{d^{m+2}}{dz^{m+2}}\left(z^\beta f^m\right) + \ldots$$

que l'on peut, si l'on veut, regarder comme déterminé par l'égalité

$$\frac{d}{dz}\left(\Psi(z) e^{-z}\right) + e^{-z}\frac{d^m}{dz^m}\left(z^\beta f^m\right) = 0$$

est congru au polynome $\phi(z)$, suivant le module $f(z)$; d'un autre côté, on voit que tous les termes de

$$\frac{d^m}{dz^m}\left(z^\beta f^m\right)$$

contiennent le faisceau numérique $1, 2, 3, \ldots m$: Si en effet on ordonne suivant les puissances de h l'expression

$$(z+h)^\beta f^m(z+h)$$

il est évident que le coefficient de h^m sera une fonction entière à coefficients entiers de z et de $a_0, a_1, \ldots a_{n+1}$; or ce coefficient de h^m, multiplié par $1.2.3 \ldots m$ n'est autre chose que

$$\frac{d^m}{dz^m}\left(z^\beta f^m\right);$$

en résumé, on voit que si l'on détermine les polynomes $\phi_\beta(z, m)$, $\psi_\beta(z, m)$ par les équations

$$(11) \ldots\ldots \frac{d}{dz}\left[\phi_\beta(z, m)e^{-z}\right] + \frac{e^{-z} z^\beta f^m}{1.2 \ldots m} = 0$$

$$(12) \ldots\ldots \frac{d}{dz}\left[\psi_\beta(z, m)e^{-z}\right] + \frac{e^{-z}}{1.2 \ldots m} \frac{d^m}{dz^m}\left(z^\beta f^m\right) = 0$$

les polynomes $\phi_\beta(z, m)$, $\psi_\beta(z, m)$ seront congrus suivant le module $f(z)$ et le second sera une fonction entière à coefficients entiers de $z, a_0, a_1, \ldots a_{n+1}$; Si a_0 est égal à un, en divisant $\psi_\beta(z, m)$ par $f(z)$ jusqu'à ce qu'on trouve le reste, on n'introduira aucun dénominateur, en sorte que ce reste, que je désignerai par $g_\beta(z, m)$, sera, lui aussi, une fonction entière à coefficients entiers de $z, a_0, a_1, \ldots a_{n+1}$; si a_0 n'est pas égal à un, il conviendra, avant de faire la division, de multiplier $\psi_\beta(z, m)$ par une puissance convenable de a_0 ; comme $\psi_\beta(z, m)$ est du même degré que

$$\frac{d^m}{dz^m}\left(z^\beta f^m\right)$$

c'est-à-dire du degré

$$m(n+1)+\beta-m \leq mn+n$$

on voit que, en divisant par $f(z)$, on aura à faire pour arriver au reste, un nombre de divisions partielles au plus égal à mn; en sorte que le reste de la division par $f(z)$ de

$$a_0^{mn}\,\psi_\beta(z,m)\ ^{(1)},$$

reste que je désignerai encore par $g_\beta(z,m)$, sera sûrement une fonction entière à coefficients entiers de $z, a_0, a_1, \ldots a_{n+1}$: cette fonction est aussi le reste de la division par $f(z)$ de

$$a_0^{mn}\,\phi_\beta(z,m).$$

Il est très important, pour ce qui va suivre de montrer que les polynômes

$$g_0(z,m), g_1(z,m), \ldots, g_n(z,m)$$

ainsi formés sont linéairement indépendants.

Supposons pour cela, que ces polynomes soient liés par une relation, identique en z, à coefficients constants,

$$c_0 g_0(z,m)+c_1 g_1(z,m)+\ldots+c_n g_n(z,m)=0;$$

l'expression

$$K(z)=c_0\phi_0(z,m)+c_1\phi_1(z,m)+\ldots+c_n\phi_n(z,m)$$

serait alors divisible par $f(z)$; d'ailleurs si l'on pose

$$\theta(z)=\frac{1}{1.2\ldots m}(c_0+c_1 z+\ldots+c_n z^n),$$

on sait de suite, en vertu de l'équation (11) que $K(z)$ vérifie

---

(1) Il est même aisé de voir qu'il suffit de multiplier par $a_0^{m(n-1)}$, parce que les premiers coefficients de $\psi_\beta(z,m)$ contiennent respectivement les facteurs $a_0^m, a_0^{m-1}, \ldots a_1$; mais je n'insiste pas sur ce point qui n'a pas d'importance pour la suite. — Disons aussi que M. Weierstrass a donné pour la formation des polynomes $g_\beta(z,m)$ une règle qui n'est pas indiquée ici.

identiquement l'équation

$$\frac{d}{dz}\left[K(z)\,e^{-z}\right]+\theta(z)f^m(z)e^{-z}=0$$

ou celle-ci qui lui est équivalente,

$$(13)\ldots\ldots\ldots\ldots K'(z)-K(z)+\theta(z)f^m(z)=0$$

Cherchons, en général, si une relation de cette forme, où $\theta(z)$ est un polynome quelconque en z, peut être vérifiée par un polynome $K(z)$ divisible par $f(z)$; pour cela, remplaçons y $K(z)$ par

$$Q f^p$$

en désignant par p un entier positif et par Q un polynome en z qui ne soit plus divisible par $f(z)$; elle deviendra, après avoir divisé par f^{p-1}

$$(14)\ldots\ldots\ldots\ldots (Q'-Q)f+pQf'+\theta f^{m-p+1}=0;$$

d'où l'on voit qu'on ne peut supposer p plus petit que $m+1$, sans le supposer nul, puisque, autrement, f devrait diviser Qf' et par conséquent Q, puisqu'il est premier avec f: ainsi lorsqu'un polynome K vérifie identiquement une équation telle que (13) où $\theta(z)$ est un polynome quelconque en z, et qu'il est divisible par f, il est aussi divisible par f^{m+1}; cette circonstance ne peut se présenter lorsque $\theta(z)$ est de degré inférieur à $m+1$, puisque, alors, K, dont le degré est le même que celui de θf^m, est de degré moindre que f^{m+1} au moins d'une unité. Il n'y a d'exception que si K et par conséquent θ est identiquement nul; on aurait alors, dans le cas particulier qui nous occupe

$$c_0=0,\ c_1=0,\ldots\ldots\ldots c_n=0$$

Il résulte de là que si l'on désigne par $z_0, z_1, \ldots, z_n$ n nombres quelconques distincts, le déterminant du $(n+1)^{ième}$ ordre dont

$$y_\beta(z_\alpha, m)$$

est le terme qui appartient à la ligne de rang $\alpha+1$ et à la colonne

de rang $\beta+1$, est différent de zéro; s'il était nul en effet, il existerait un système de constantes numériques $c_0, c_1, \dots c_n$, non toutes nulles, telles que l'on ait

$$c_0 g_0(z_\alpha, m) + c_1 g_1(z_\alpha, m) + \dots + c_n g_n(z_\alpha, m)$$

pour $\alpha = 0, 1, 2 \dots n$; le polynome en z de degré n au plus,

$$c_0 g_0(z, m) + c_1 g_1(z, m) + \dots + c_n g_n(z, m)$$

s'annulerait donc pour $n+1$ valeurs distinctes de z: il serait donc identiquement nul en z, ce que l'on sait être impossible.

Ceci posé on tire de l'égalité (5) la relation

$$(15) \dots g_\beta(z_\alpha, m)\, e^{-z_\alpha} - g_\beta(z_0, m)\, e^{-z_0} + \frac{a_0^{mn}}{1.2 \dots m} \int_{z_0}^{z_\alpha} z^\beta f^m(z)\, dz = 0$$

$$\alpha = 0, 1, 2 \dots, n \,;\, \beta = 0, 1, 2 \dots n),$$

ou

$$(16) \dots \dots \dots \dots \delta_{\alpha,\beta} = \frac{e^{z_0 + z_\alpha} a_0^{mn}}{1.2 \dots m} \int_{z_0}^{z_\alpha} z^\beta f^m(z)\, dz$$

en posant, pour les mêmes valeurs de α, β

$$(17) \dots \dots \dots \dots \delta_{\alpha,\beta} = g_\beta(z_0, m)\, e^{z_\alpha} - g_\beta(z_\alpha, m)\, e^{z_0};$$

on déduit de là sans peine que, si l'on se donne un nombre positif quelconque ε, aussi petit qu'on veut, on peut lui faire correspondre un entier positif M tel que l'on ait

$$|\delta_{\alpha,\beta}| < \varepsilon$$

sous la seule condition

$$m \geq M;$$

désignons en effet par R un nombre positif supérieur à un et aux modules des racines de $f(z)$ et par A un nombre positif tel que

l'on ait

$$|f(z)| < A$$

pour toutes les valeurs de z dont le module est inférieur à R ; il est clair que l'on aura

$$\left| e^{z_0 + z_\alpha} \right| < e^{2R}, \quad \left| z_\alpha - z_0 \right| < 2R$$

$$\left| \int_{z_0}^{z_\alpha} z^\beta f^m(z) e^{-z} dz \right| < 2R \times R^n \times A^m \times e^R$$

et par suite

$$\left| S_{\alpha,\beta} \right| < 2R^{n+1} e^{3R} \frac{(A a_0^n)^m}{1.2.\ldots.m} \qquad \begin{matrix} \alpha = 0, 1, 2, \ldots, n \\ \beta = 0, 1, 2, \ldots, n \end{matrix}$$

les facteurs mis en avant de la fraction qui figure au second membre ne dépendent pas de m et la fraction tend évidemment vers zéro quand m augmente indéfiniment, la proposition est donc démontrée.

V Voir maintenant comment M. Hermite a déduit de résultats équivalents à ceux qui précèdent le caractère transcendant du nombre e.

Supposons que ce nombre vérifie une équation entière à coefficients entiers du degré n.

$$F(z) = A_0 + A_1 z + \ldots\ldots\ldots + A_n z^n = 0 ;$$

et prenons pour $f(z)$ le polynome

$$f(z) = z(z-1)(z-2)\ldots(z-n)$$

dans lequel les coefficients sont évidemment entiers, le premier de ces coefficients étant égal à un : construisons comme il a été expliqué dans le paragraphe précédent les polynomes $g_\beta(z, m)$, $(\beta = 0, 1, 2 \ldots n)$ au moyen du polynome $f(z)$: ils auront leurs coefficients entiers et les nombres $g_\beta(z_\alpha, m)$ ou $g_\beta(\alpha, m)$ seront évidemment entiers pour toutes les valeurs $0, 1, 2, \ldots n$ attribuées aux indices α, β ; les égalités (17) prendront la forme

(18) ..... $g_\beta(0,m)\,e^{\alpha} - g_\beta(\alpha,m) = \delta_{\alpha,\beta}$;

donnons dans cette égalité à α les valeurs $0, 1, 2, \ldots n$, multiplions respectivement les égalités ainsi obtenues par $A_0, A_1, \ldots A_n$ et ajoutons ; il viendra

$$g_\beta(0,m)\,F(e) - \sum_{\alpha=0}^{\alpha=n} A_\alpha\, g_\beta(\alpha,m) = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=n} A_\alpha\, \delta_{\alpha,\beta} ;$$

puisque l'on suppose $F(e)$ nul, le premier membre sera un nombre entier ; d'autre part, on a pu choisir m assez grand pour que les valeurs absolues des diverses quantités $\delta_{\alpha,\beta}$ $(\alpha = 0, 1, 2, \ldots n)$ soient plus petites que tel nombre positif que l'on voudra, par exemple que l'inverse de la somme des valeurs absolues des nombres A_α $(\alpha = 0, 1, 2, \ldots n)$; dès lors le second membre sera, en valeur absolue, plus petit que un ; puisqu'il doit être entier, il ne peut être que nul : on aurait donc

$$A_0\, g_\beta(0,m) + A_1\, g_\beta(1,m) + \ldots + A_n\, g_\beta(n,m) = 0$$

$$(\beta = 0, 1, 2, \ldots n)$$

mais ces égalités, puisque le déterminant des quantités $g_\beta(\alpha,m)$ est différent de zéro, exigent que tous les nombres $A_0, A_1, \ldots A_n$ soient nuls ; la proposition est donc établie.

VI Voici, de même, comment M. Weierstrass établit le caractère transcendant du nombre π.

Adoptons le langage suivant : un nombre est dit algébrique quand il est racine d'une équation algébrique entière à coefficients entiers ; un nombre est dit algébrique entier quand il est racine d'une équation algébrique entière à coefficients entiers dans laquelle le coefficient de la plus haute puissance de l'inconnue est égal à un.

Lorsqu'on sait d'un nombre qu'il est algébrique entier et qu'il est rationnel, on peut affirmer qu'il est entier. Il résulte

immédiatement de la théorie des fonctions symétriques que toute fonction entière à coefficients entiers, d'un ou de plusieurs nombres algébriques entiers est elle-même un nombre algébrique entier.

Observons enfin que si un nombre algébrique z est racine d'une équation algébrique entière à coefficients entiers

$$a_0 z^{n+1} + a_1 z^n + \ldots + a_{n+1} = 0$$

le nombre $a_0 z$, sera algébrique entier; puisque l'on aura

$$(a_0 z)^{n+1} + a_1 (a_0 z)^n + \ldots + a_{n+1} a_0^n = 0$$

Ceci posé, nous allons montrer que l'expression

$$e^x + 1$$

ne peut s'annuler pour aucune valeur algébrique de x; il en résultera que πi ne peut être un nombre algébrique, ni par conséquent π^2: en effet si π^2 était algébrique, il en serait de même de $-\pi^2$ et de $\sqrt{-\pi^2} = \pi i$.

Admettons que la fonction précédente s'annule pour $x = x_1$, x_1 étant une racine d'une équation algébrique entière à coefficients entiers, que nous pouvons évidemment supposer sans racines égales et sans racines rationnelles, puisque, pour ces dernières racines e^x est positif; soit r le degré de cette équation, au moins égal à deux, et soient $x_2, x_3, \ldots, x_r$ ses racines, autres que x_1; nous allons montrer qu'il y a absurdité à supposer nul le produit

$$P = (1 + e^{x_1})(1 + e^{x_2}) \ldots (1 + e^{x_r})$$

Développons en effet le produit sous la forme

$$P = e^0 + e^{x_1} + e^{x_2} + \ldots + e^{x_1 + x_2} + \ldots + e^{x_1 + x_2 + \ldots + x_r}$$

le développement contiendra $\mu + 1 = 2^r$ termes; désignons par ξ_i $(i = 0, 1, 2, \ldots \mu,\ \xi_0 = 0)$ les nombres

$$0, x_1, x_2, \ldots, x_1 + x_2, \ldots, x_1 + x_2 + \ldots + x_r.$$

dont la loi est évidente, et qui figurent en exposants; ces nombres seront racines d'une équation

$$F(z) = z \prod_{i=1}^{i=p} (z - \xi_i) = 0$$

dont les coefficients seront évidemment des fonctions symétriques, à coefficients entiers des racines $x_1, x_2, \ldots, x_p$ d'une équation à coefficients entiers : les coefficients de $F(z)$ seront donc rationnels; d'ailleurs ce polynome a au moins $p+1$ racines distinctes, à savoir $0, x_1, x_2, \ldots, x_p$; en le divisant par le plus grand commun diviseur qu'il a avec sa dérivée et en égalant à zéro le quotient multiplié au besoin par un nombre entier convenable, on formera une équation

$$f(z) = a_0 z^{n+1} + a_1 z^n + \ldots + a_n z = 0$$

à coefficients entiers. Soient :

$$z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n$$

les racines de cette équation, dont la première z_0 est nulle; si nous désignons par b_α $(\alpha = 0, 1, 2, \ldots n)$ le degré de multiplicité de la racine z_α dans $F(z)$ nous aurons évidemment

$$F(z) = z^{b_0} (z - z_1)^{b_1} \ldots (z - z_n)^{b_n}$$

$$\mathcal{P} = b_0 + b_1 e^{z_1} + b_2 e^{z_2} + \ldots + b_n e^{z_n};$$

les nombres $b_0, \ldots b_n$ étant entiers et positifs.

Formons, maintenant, avec le polynome $f(z)$, les polynomes $g_\beta(z, m)$ $(\beta = 0, 1, 2, \ldots n)$, comme il a été expliqué dans le paragraphe (4) et reprenons les égalités (17) que l'on peut écrire dans ce cas

$$g_\beta(0, m) e^{z_\alpha} - g_\beta(z_\alpha, m) = \delta_{\alpha\beta};$$

donnons à α les valeurs $0, 1, 2, \ldots, n$; multiplions les égalités ainsi obtenues par $b_0, b_1, \ldots b_n$ et ajoutons; il viendra :

$$\mathcal{P}\, g_\beta(z_0, m) - \sum_{\alpha=0}^{\alpha=n} b_\alpha\, g_\beta(z_\alpha, m) = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=n} b_\alpha\, \delta_{\alpha,\beta},$$

ou en supposant que $\mathcal{P}$ soit nul et en multipliant par α_0^n.

$$-\sum_{\alpha=0}^{\alpha=n} b_\alpha \left[a_0^n\, g_\beta(z_\alpha, m) \right] = a_0^n \sum_{\alpha=0}^{\alpha=n} b_\alpha\, \delta_{\alpha,\beta};$$

or le premier membre est une fonction symétrique à coefficients entiers des racines de $F(z)$, c'est donc un nombre rationnel ; d'un autre côté, z_α figure dans $g_\beta(z_\alpha, m)$ au plus au degré $\underline{n}$; si donc on multiplie tous les termes de $g_\beta(z_\alpha, m)$ par a_0^n le produit sera une fonction entière à coefficients entiers du nombre algébrique entier $a_0 z_\alpha$; le premier membre de l'égalité précédente étant à la fois un nombre rationnel et un nombre algébrique entier est un nombre entier au sens ordinaire du mot.

Mais, on a pu choisir $\underline{m}$ de manière que le second membre de l'égalité précédente soit plus petit que un ; il faudrait donc que l'on eût

$$b_0\, g_\beta(z_0, m) + b_1\, g_\beta(z, m) + \ldots + b_n\, g_\beta(z_n, m) = 0$$

$$\beta = 0, 1, 2, \ldots\ldots n,$$

et l'on voit comme précédemment que cela est impossible.

VII Peut-être n'est-il pas inutile, afin d'en mieux reconnaître le caractère, d'insister sur les égalités (16) et (17) qui ont joué dans les deux démonstrations relatives à $\underline{e}$ et $\underline{\pi}$ un rôle si essentiel : ces égalités dans lesquelles les seconds membres tendent vers zéro quand $\underline{m}$ augmente indéfiniment, montrent que la fraction

$$\frac{g_\beta(z_\alpha, m)}{g_\beta(z_0, m)}$$

fournit, au moins si le dénominateur n'est pas très petit, une valeur approchée de

$$\frac{e^{z_\alpha}}{e^{z_0}}$$

en sorte que les fractions de même dénominateur

$$\frac{g_\beta(z_1, m)}{g_\beta(z_0, m)}, \quad \frac{g_\beta(z_2, m)}{g_\beta(z_0, m)}, \ldots\ldots, \frac{g_\beta(z_n, m)}{g_\beta(z_0, m)}$$

fourniront des valeurs rapprochées de

$$\frac{e^{z_1}}{e^{z_0}}, \quad \frac{e^{z_2}}{e^{z_0}}, \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{e^{z_n}}{e^{z_0}}$$

et l'on voit que l'on peut obtenir $n+1$ systèmes de telles fractions en donnant à β les valeurs $0, 1, 2, \ldots\ldots n$. On a ainsi une généralisation manifeste de la notion des fractions continues; or c'est précisément cette généralisation, posée à priori qui est l'idée fondamentale du Mémoire de M. Hermite sur la fonction exponentielle et dont l'étude l'a conduit à des égalités toutes pareilles aux égalités (17). Tout d'abord il est évidemment naturel de supposer $z_0 = 0$, puisque dans les fractions qui précèdent ne figurent que les différences $z_1 - z_0, \ldots\ldots z_n - z_0$; puis, pour nous rapprocher de ce qui a été dit au début, remplaçons $z_1, z_2 \ldots\ldots z_n$ par $z_1 x, z_2 x, \ldots\ldots z_n x$, ou, ce qui revient au même, écrivons, en supposant encore $x_0 = 1$, le polynome $f(z)$ sous la forme

$$f(z) = z^{n+1} + a_1 z^n x + a_2 z^{n-1} x^2 + \ldots\ldots + a_n z x^n$$

les polynomes $g_\beta(z, m)$ formés d'après les règles du paragraphe (4) au moyen de $f(z)$ auront pour coefficients des fonctions entières de x; pour éviter toute confusion désignons maintenant ces polynomes par $G_\beta(z, m)$.

Les équations (16 et 17) montrent comme dans le paragraphe

V en faisant encore dans l'intégrale la substitution $z = z_\alpha x t$, que les fractions rationnelles en x de même dénominateur.

$$\frac{\varphi_\beta(z, x, m)}{\varphi_\beta(o, m)}, \frac{\varphi_\beta(z_2 x, m)}{\varphi_\beta(o, m)}, \ldots\ldots, \frac{\varphi_\beta(z_n x, m)}{\varphi_\beta(o, m)}$$

représentent les fonctions exponentielles

$$e^{z_1 x}, e^{z_2 x}, \ldots\ldots e^{z_n x}$$

aux termes près d'ordre $m n + \beta + 1$.

VIII) — Laissant de côté la variable x, et reprenant les notations antérieures, il est naturel, en raison même du rapprochement qui vient d'être signalé avec la théorie des fractions continues de montrer comment se présentent, du point de vue où nous sommes, les relations recurrentes entre les termes des fractions

$$\frac{g_\beta(z_1, m)}{g_\beta(z_0, m)}, \frac{g_\beta(z_2, m)}{g_\beta(z_0, m)}, \ldots\ldots, \frac{g_\beta(z_n, m)}{g_\beta(z_0, m)}$$

relatives à des valeurs consécutives de m.

Il est évident que $n+2$ polynomes $g_\beta(z, m)$ relatifs à $n+2$ valeurs distinctes de m doivent être liés par une relation linéaire à coefficients indépendants de z puisque ces polynomes sont de degré n au plus. Les coefficients de cette relation seront des fonctions entières des coefficients du polynome $f(z)$ et l'on voit ainsi qu'il doit exister une relation de recurrence entre les quantités

$$g_\beta(z_\alpha, m), g_\beta(z_\alpha, m+1), \ldots\ldots, g_\beta(z_\alpha, m+n+1)$$

$$(\alpha = 0, 1, 2, \ldots\ldots n)$$

La relation linéaire cherchée.

$$(9) \ldots\ldots \lambda_0 g_\beta(z, m) + \lambda_1 g_\beta(z, m+1) + \ldots\ldots + \lambda_{n+1} g_\beta(z, m+n+1) = 0$$

pourra s'obtenir comme il suit, sans connaître explicitement les polynomes $g_\beta(z, m)$. Pour plus de simplicité nous supposerons

$$m(n+1)+\beta-m \leq mn+n$$

on voit que, en divisant par $f(z)$, on aura à faire pour arriver au reste, un nombre de divisions partielles au plus égal à mn; en sorte que le reste de la division par $f(z)$ de

$$a_0^{mn}\,\psi_\beta(z,m)\ ^{(1)},$$

reste que je désignerai encore par $g_\beta(z,m)$, sera sûrement une fonction entière à coefficients entiers de $z_1, a_0, a_1, \ldots a_{n+1}$: cette fonction est aussi le reste de la division par $f(z)$ de

$$a_0^{mn}\,\phi_\beta(z,m).$$

Il est très important, pour ce qui va suivre de montrer que les polynômes

$$g_0(z,m), g_1(z,m), \ldots, g_n(z,m)$$

ainsi formés sont linéairement indépendants.

Supposons pour cela, que ces polynomes soient liés par une relation, identique en z, à coefficients constants,

$$c_0 g_0(z,m)+c_1 g_1(z,m)+\ldots+c_n g_n(z,m)=0;$$

l'expression

$$K(z)=c_0\phi_0(z,m)+c_1\phi_1(z,m)+\ldots+c_n\phi_n(z,m)$$

serait alors divisible par $f(z)$; d'ailleurs si l'on pose

$$\theta(z)=\frac{1}{1.2\ldots m}(c_0+c_1 z+\ldots+c_n z^n),$$

on sait de suite, en vertu de l'équation (11) que $K(z)$ vérifie

---

(1) Il est même aisé de voir qu'il suffit de multiplier par $a_0^{m(n-1)}$, parce que les premiers coefficients de $\psi_\beta(z,m)$ contiennent respectivement les facteurs $a_0^m, a_0^{m-1}, \ldots a_1$; mais je n'insiste pas sur ce point qui n'a pas d'importance pour la suite. — Disons aussi que M. Weierstrass a donné pour la formation des polynomes $g_\beta(z,m)$ une règle qui n'est pas indiquée ici.

identiquement l'équation

$$\frac{d}{dz}\left[K(z)\,e^{-z}\right]+\theta(z)f^m(z)e^{-z}=0$$

ou celle-ci qui lui est équivalente,

$$(13)\ldots\ldots\ldots\ldots K'(z)-K(z)+\theta(z)f^m(z)=0$$

Cherchons, en général, si une relation de cette forme, où $\theta(z)$ est un polynome quelconque en z, peut être vérifiée par un polynome $K(z)$ divisible par $f(z)$; pour cela, remplaçons y $K(z)$ par

$$Q f^p$$

en désignant par p un entier positif et par Q un polynome en z qui ne soit plus divisible par $f(z)$; elle deviendra, après avoir divisé par f^{p-1},

$$(14)\ldots\ldots\ldots\ldots (Q'-Q)f+pQf'+\theta f^{m-p+1}=0;$$

d'où l'on voit qu'on ne peut supposer p plus petit que $m+1$, sans le supposer nul, puisque, autrement, f devrait diviser Qf' et par conséquent Q, puisqu'il est premier avec f: ainsi lorsqu'un polynome K vérifie identiquement une équation telle que (13) où $\theta(z)$ est un polynome quelconque en z, et qu'il est divisible par f, il est aussi divisible par f^{m+1}; cette circonstance ne peut se présenter lorsque $\theta(z)$ est de degré inférieur à $m+1$, puisque, alors, K, dont le degré est le même que celui de θf^m, est de degré moindre que f^{m+1} au moins d'une unité. Il n'y a d'exception que si K et par conséquent θ est identiquement nul; on aurait alors, dans le cas particulier qui nous occupe

$$c_0=0,\ c_1=0,\ldots\ldots\ldots c_n=0$$

Il résulte de là que si l'on désigne par $z_0, z_1, \ldots, z_n$ n nombres quelconques distincts, le déterminant du $(n+1)^{ième}$ ordre dont

$$\gamma_\beta(z_\alpha, m)$$

est le terme qui appartient à la ligne de rang $\alpha+1$ et à la colonne

de rang $\beta+1$, est différent de zéro; s'il était nul en effet, il existerait un système de constantes numériques $c_0, c_1, \dots c_n$, non toutes nulles, telles que l'on ait

$$c_0 g_0(z_\alpha, m) + c_1 g_1(z_\alpha, m) + \dots + c_n g_n(z_\alpha, m)$$

pour $\alpha = 0, 1, 2 \dots n$; le polynome en z de degré n au plus,

$$c_0 g_0(z, m) + c_1 g_1(z, m) + \dots + c_n g_n(z, m)$$

s'annulerait donc pour $n+1$ valeurs distinctes de z: il serait donc identiquement nul en z, ce que l'on sait être impossible.

Ceci posé on tire de l'égalité (5) la relation

$$(15) \dots g_\beta(z_\alpha, m)\, e^{-z_\alpha} - g_\beta(z_0, m)\, e^{-z_0} + \frac{a_0^{mn}}{1.2 \dots m} \int_{z_0}^{z_\alpha} z^\beta f^m(z)\, dz = 0$$

$$\alpha = 0, 1, 2 \dots, n \,;\, \beta = 0, 1, 2 \dots n),$$

ou

$$(16) \dots \delta_{\alpha,\beta} = \frac{e^{z_0 + z_\alpha} a_0^{mn}}{1.2 \dots m} \int_{z_0}^{z_\alpha} z^\beta f^m(z)\, dz$$

en posant, pour les mêmes valeurs de α, β

$$(17) \dots \delta_{\alpha,\beta} = g_\beta(z_0, m)\, e^{z_\alpha} - g_\beta(z_\alpha, m)\, e^{z_0};$$

on déduit de là sans peine que, si l'on se donne un nombre positif quelconque ε, aussi petit qu'on veut, on peut lui faire correspondre un entier positif M tel que l'on ait

$$|\delta_{\alpha,\beta}| < \varepsilon$$

sous la seule condition

$$m \geq M;$$

désignons en effet par R un nombre positif supérieur à un et aux modules des racines de $f(z)$ et par A un nombre positif tel que

l'on ait

$$|f(z)| < A$$

pour toutes les valeurs de z dont le module est inférieur à R ; il est clair que l'on aura

$$|e^{z_0+z_\alpha}| < e^{2R}, \quad |z_\alpha - z_0| < 2R$$

$$\left|\int_{z_0}^{z_\alpha} z^\beta f^m(z) e^{-z} dz\right| < 2R \times R^n \times A^m \times e^R$$

et par suite

$$|S_{\alpha,\beta}| < 2R^{n+1} e^{3R} \frac{(A a_0^n)^m}{1.2.\ldots.m} \qquad \begin{matrix} \alpha = 0,1,2,\ldots,n \\ \beta = 0,1,2,\ldots,n \end{matrix}$$

les facteurs mis en avant de la fraction qui figure au second membre ne dépendent pas de $\underline{m}$ et la fraction tend évidemment vers zéro quand m augmente indéfiniment, la proposition est donc démontrée.

V Voir maintenant comment M. Hermite a déduit de résultats équivalents à ceux qui précèdent le caractère transcendant du nombre $\underline{e}$.

Supposons que ce nombre vérifie une équation entière à coefficients entiers du degré n.

$$F(z) = A_0 + A_1 z + \ldots\ldots\ldots + A_n z^n = 0;$$

et prenons pour $f(z)$ le polynome

$$f(z) = z(z-1)(z-2)\ldots(z-n)$$

dans lequel les coefficients sont évidemment entiers, le premier de ces coefficients étant égal à un : construisons comme il a été expliqué dans le paragraphe précédent les polynomes $g_\beta(z,m)$, $(\beta = 0,1,2\ldots n)$ au moyen du polynome $f(z)$: ils auront leurs coefficients entiers et les nombres $g_\beta(z_\alpha, m)$ ou $g_\beta(\alpha, m)$ seront évidemment entiers pour toutes les valeurs $0,1,2,\ldots n$ attribuées aux indices α, β ; les égalités (17) prendront la forme

(18) ..... $g_\beta(0,m)\,e^\alpha - g_\beta(\alpha,m) = \delta_{\alpha,\beta}$;

donnons dans cette égalité à α les valeurs $0, 1, 2, \ldots n$, multiplions respectivement les égalités ainsi obtenues par $A_0, A_1, \ldots A_n$ et ajoutons ; il viendra

$$g_\beta(0,m)\,F(e) - \sum_{\alpha=0}^{\alpha=n} A_\alpha\, g_\beta(\alpha,m) = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=n} A_\alpha\, \delta_{\alpha,\beta} ;$$

puisque l'on suppose $F(e)$ nul, le premier membre sera un nombre entier ; d'autre part, on a pu choisir m assez grand pour que les valeurs absolues des diverses quantités $\delta_{\alpha,\beta}$ $(\alpha = 0, 1, 2, \ldots n)$ soient plus petites que tel nombre positif que l'on voudra, par exemple que l'inverse de la somme des valeurs absolues des nombres A_α $(\alpha = 0, 1, 2, \ldots n)$; dès lors le second membre sera, en valeur absolue, plus petit que un ; puisqu'il doit être entier, il ne peut être que nul : on aurait donc

$$A_0\, g_\beta(0,m) + A_1\, g_\beta(1,m) + \ldots + A_n\, g_\beta(n,m) = 0$$

$$(\beta = 0, 1, 2, \ldots n)$$

mais ces égalités, puisque le déterminant des quantités $g_\beta(\alpha,m)$ est différent de zéro, exigent que tous les nombres $A_0, A_1, \ldots A_n$ soient nuls ; la proposition est donc établie.

VI Voici, de même, comment M. Weierstrass établit le caractère transcendant du nombre π.

Adoptons le langage suivant : un nombre est dit algébrique quand il est racine d'une équation algébrique entière à coefficients entiers ; un nombre est dit algébrique entier quand il est racine d'une équation algébrique entière à coefficients entiers dans laquelle le coefficient de la plus haute puissance de l'inconnue est égal à un.

Lorsqu'on sait d'un nombre qu'il est algébrique entier et qu'il est rationnel, on peut affirmer qu'il est entier. Il résulte

immédiatement de la théorie des fonctions symétriques que toute fonction entière à coefficients entiers, d'un ou de plusieurs nombres algébriques entiers est elle-même un nombre algébrique entier.

Observons enfin que si un nombre algébrique z est racine d'une équation algébrique entière à coefficients entiers

$$a_0 z^{n+1} + a_1 z^n + \ldots + a_{n+1} = 0$$

le nombre $a_0 z$, sera algébrique entier; puisque l'on aura

$$(a_0 z)^{n+1} + a_1 (a_0 z)^n + \ldots + a_{n+1} a_0^n = 0$$

Ceci posé, nous allons montrer que l'expression

$$e^x + 1$$

ne peut s'annuler pour aucune valeur algébrique de x; il en résultera que πi ne peut être un nombre algébrique, ni par conséquent π^2: en effet si π^2 était algébrique, il en serait de même de $-\pi^2$ et de $\sqrt{-\pi^2} = \pi i$.

Admettons que la fonction précédente s'annule pour $x = x_1$, x_1 étant une racine d'une équation algébrique entière à coefficients entiers, que nous pouvons évidemment supposer sans racines égales et sans racines rationnelles, puisque, pour ces dernières racines e^x est positif; soit r le degré de cette équation, au moins égal à deux, et soient $x_2, x_3, \ldots, x_r$ ses racines, autres que x_1; nous allons montrer qu'il y a absurdité à supposer nul le produit

$$P = (1+e^{x_1})(1+e^{x_2}) \ldots (1+e^{x_r})$$

Développons en effet le produit sous la forme

$$P = e^0 + e^{x_1} + e^{x_2} + \ldots + e^{x_1+x_2} + \ldots + e^{x_1+x_2+\ldots+x_r}$$

le développement contiendra $\mu + 1 = 2^r$ termes; désignons par ξ_i $(i = 0, 1, 2, \ldots \mu,\ \xi_0 = 0)$ les nombres

$$0, x_1, x_2, \ldots, x_1+x_2, \ldots, x_1+x_2+\ldots+x_r.$$

dont la loi est évidente, et qui figurent en exposants; ces nombres seront racines d'une équation

$$F(z) = z \prod_{i=1}^{i=p} (z - \xi_i) = 0$$

dont les coefficients seront évidemment des fonctions symétriques, à coefficients entiers des racines $x_1, x_2, \ldots, x_p$ d'une équation à coefficients entiers : les coefficients de $F(z)$ seront donc rationnels; d'ailleurs ce polynome a au moins $p+1$ racines distinctes, à savoir $0, x_1, x_2, \ldots, x_p$; en le divisant par le plus grand commun diviseur qu'il a avec sa dérivée et en égalant à zéro le quotient multiplié au besoin par un nombre entier convenable, on formera une équation

$$f(z) = a_0 z^{n+1} + a_1 z^n + \ldots + a_n z = 0$$

à coefficients entiers. Soient :

$$z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n$$

les racines de cette équation, dont la première z_0 est nulle; si nous désignons par b_α $(\alpha = 0, 1, 2, \ldots n)$ le degré de multiplicité de la racine z_α dans $F(z)$ nous aurons évidemment

$$F(z) = z^{b_0} (z - z_1)^{b_1} \ldots (z - z_n)^{b_n}$$

$$\mathcal{P} = b_0 + b_1 e^{z_1} + b_2 e^{z_2} + \ldots + b_n e^{z_n};$$

les nombres $b_0, \ldots b_n$ étant entiers et positifs.

Formons, maintenant, avec le polynome $f(z)$, les polynomes $g_\beta(z, m)$ $(\beta = 0, 1, 2, \ldots n)$, comme il a été expliqué dans le paragraphe (4) et reprenons les égalités (17) que l'on peut écrire dans ce cas

$$g_\beta(0, m) e^{z_\alpha} - g_\beta(z_\alpha, m) = S_{\alpha,\beta};$$

donnons à α les valeurs $0, 1, 2, \ldots, n$; multiplions les égalités ainsi obtenues par $b_0, b_1, \ldots b_n$ et ajoutons; il viendra :

$$\mathrm{P}\, g_\beta(z_0, m) - \sum_{\alpha=0}^{\alpha=n} b_\alpha\, g_\beta(z_\alpha, m) = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=n} b_\alpha\, \delta_{\alpha,\beta},$$

ou en supposant que P soit nul et en multipliant par a_0^n.

$$-\sum_{\alpha=0}^{\alpha=n} b_\alpha \left[a_0^n\, g_\beta(z_\alpha, m) \right] = a_0^n \sum_{\alpha=0}^{\alpha=n} b_\alpha\, \delta_{\alpha,\beta};$$

or le premier membre est une fonction symétrique à coefficients entiers des racines de $F(z)$, c'est donc un nombre rationnel ; d'un autre côté, z_α figure dans $g_\beta(z_\alpha, m)$ au plus au degré $\underline{n}$; si donc on multiplie tous les termes de $g_\beta(z_\alpha, m)$ par a_0^n le produit sera une fonction entière à coefficients entiers du nombre algébrique entier $a_0 z_\alpha$; le premier membre de l'égalité précédente étant à la fois un nombre rationnel et un nombre algébrique entier est un nombre entier au sens ordinaire du mot.

Mais, on a pu choisir $\underline{m}$ de manière que le second membre de l'égalité précédente soit plus petit que un ; il faudrait donc que l'on eût

$$b_0\, g_\beta(z_0, m) + b_1\, g_\beta(z_1, m) + \ldots + b_n\, g_\beta(z_n, m) = 0$$

$$\beta = 0, 1, 2, \ldots\ldots n,$$

et l'on voit comme précédemment que cela est impossible.

VII Peut-être n'est-il pas inutile, afin d'en mieux reconnaître le caractère, d'insister sur les égalités (16) et (17) qui ont joué dans les deux démonstrations relatives à $\underline{e}$ et $\underline{\pi}$ un rôle si essentiel : ces égalités, dans lesquelles les seconds membres tendent vers zéro quand $\underline{m}$ augmente indéfiniment, montrent que la fraction

$$\frac{g_\beta(z_\alpha, m)}{g_\beta(z_0, m)}$$

fournit, au moins si le dénominateur n'est pas très petit, une valeur approchée de

$$\frac{e^{z_\alpha}}{e^{z_0}}$$

en sorte que les fractions de même dénominateur

$$\frac{g_\beta(z_1, m)}{g_\beta(z_0, m)}, \quad \frac{g_\beta(z_2, m)}{g_\beta(z_0, m)}, \ldots\ldots, \frac{g_\beta(z_n, m)}{g_\beta(z_0, m)}$$

fourniront des valeurs rapprochées de

$$\frac{e^{z_1}}{e^{z_0}}, \quad \frac{e^{z_2}}{e^{z_0}}, \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{e^{z_n}}{e^{z_0}}$$

et l'on voit que l'on peut obtenir $n+1$ systèmes de telles fractions en donnant à β les valeurs $0, 1, 2, \ldots\ldots n$. On a ainsi une généralisation manifeste de la notion des fractions continues; or c'est précisément cette généralisation, posée à priori qui est l'idée fondamentale du Mémoire de M. Hermite sur la fonction exponentielle et dont l'étude l'a conduit à des égalités toutes pareilles aux égalités (17). Tout d'abord il est évidemment naturel de supposer $z_0 = 0$, puisque dans les fractions qui précèdent ne figurent que les différences $z_1 - z_0, \ldots\ldots z_n - z_0$; puis, pour nous rapprocher de ce qui a été dit au début, remplaçons $z_1, z_2 \ldots\ldots z_n$ par $z_1 x, z_2 x, \ldots\ldots z_n x$, ou, ce qui revient au même, écrivons, en supposant encore $x_0 = 1$, le polynome $f(z)$ sous la forme

$$f(z) = z^{n+1} + a_1 z^n x + a_2 z^{n-1} x^2 + \ldots\ldots + a_n z x^n$$

les polynomes $g_\beta(z, m)$ formés d'après les règles du paragraphe (4) au moyen de $f(z)$ auront pour coefficients des fonctions entières de x; pour éviter toute confusion désignons maintenant ces polynomes par $G_\beta(z, m)$.

Les équations (16 et 17) montrent comme dans le paragraphe

V en faisant encore dans l'intégrale la substitution $z = z_\alpha x t$, que les fractions rationnelles en x ont même dénominateur.

$$\frac{\varphi_\beta(z, x, m)}{\varphi_\beta(o, m)}, \quad \frac{\varphi_\beta(z_2 x, m)}{\varphi_\beta(o, m)}, \ldots\ldots, \frac{\varphi_\beta(z_n x, m)}{\varphi_\beta(o, m)}$$

représentent les fonctions exponentielles

$$e^{z.x}, \quad e^{z_2 x}, \ldots\ldots e^{z_n x}$$

aux termes près d'ordre $m n + \beta + 1$.

VIII) — Laissant de côté la variable x, et reprenant les notations antérieures, il est naturel, en raison même du rapprochement qui vient d'être signalé avec la théorie des fractions continues de montrer comment se présentent, du point de vue où nous sommes, les relations recurrentes entre les termes des fractions

$$\frac{g_\beta(z_1, m)}{g_\beta(z_0, m)}, \quad \frac{g_\beta(z_2, m)}{g_\beta(z_0, m)}, \ldots\ldots, \frac{g_\beta(z_n, m)}{g_\beta(z_0, m)}$$

relatives à des valeurs consécutives de m.

Il est évident que $n+2$ polynomes $g_\beta(z, m)$ relatifs à $n+2$ valeurs distinctes de m doivent être liés par une relation linéaire à coefficients indépendants de z puisque ces polynomes sont de degré n au plus. Les coefficients de cette relation seront des fonctions entières des coefficients du polynome $f(z)$ et l'on voit ainsi qu'il doit exister une relation de recurrence entre les quantités

$$g_\beta(z_\alpha, m), g_\beta(z_\alpha, m+1), \ldots\ldots, g_\beta(z_\alpha, m+n+1)$$

$$(\alpha = 0, 1, 2, \ldots\ldots n)$$

La relation linéaire cherchée.

$$(9) \ldots\ldots \lambda_0 g_\beta(z, m) + \lambda_1 g_\beta(z, m+1) + \ldots\ldots + \lambda_{n+1} g_\beta(z, m+n+1) = 0$$

pourra s'obtenir comme il suit, sans connaître explicitement les polynomes $g_\beta(z, m)$. Pour plus de simplicité nous supposerons

$a_0 = 1$; dès lors, supposer que l'équation (19) a lieu identiquement en z revient à dire que l'expression

$$L = \lambda_0 \phi(z, m) + \lambda_1 \phi(z, m+1) + \ldots + \lambda_{n+1} \phi(z, m+n+1)$$

est divisible par $f(z)$; or, à cause des équations (11) cette expression vérifie l'égalité

$$\frac{d}{dz}(L e^{-z}) + h z^\beta f^m e^{-z} = 0$$

en supposant

$$h = \mu_0 + \mu_1 f + \ldots + \mu_{n+1} f^{n+1}$$

$$(21) \quad \ldots\ldots\ldots \mu_i = \frac{\lambda_i}{1 \cdot 2 \ldots (m+i)} \quad (i = 0, 1, 2, \ldots n+1)$$

Inversement, il est clair qu'on peut déterminer les $n+2$ coefficients μ de manière que L soit divisible par f et parvenir ainsi à la relation de récurrence cherchée

Or on a vu (§ IV) que, si L vérifie l'équation (20) et est divisible par f, il est aussi divisible par f^{m+1}, on est donc amené à poser

$$L = Q f^{m+1}$$

et en substituant dans l'équation (21) on voit que Q doit vérifier identiquement l'équation

$$(22) \qquad (Q' - Q) f + (m+1) Q f' + z^\beta h = 0 ;$$

z^β est au plus du degré n, $z^\beta h$ au plus du degré $(n+1)^2 + n$; tel doit donc être au plus le degré de Qf, en sorte que Q doit être au plus du degré $(n+1)^2 - 1$. En égalant à zéro, dans l'équation (22) les coefficients des diverses puissances de z, on obtiendra $(n+1)^2 + n + 1$ équations qui seront évidemment linéaires et homogènes par rapport aux $(n+1)^2$ coefficients de Q et aux $n+2$ indéterminées λ ; le nombre des inconnues sera donc supérieur d'une unité au nombre des

équations.

On pourra diriger le calcul comme il suit :

Posons

$$Q = Q_0 + Q_1 f + Q_2 f^2 + \ldots + Q_n f^n,$$

les symboles $Q_0, Q_1, \ldots, Q_n$ désignant des polynomes à coefficients indéterminés du degré n; on mettra Q et Qf' sous les formes

$$Q' = R_0 + R_1 f + \ldots + R_n f^n,$$

$$Qf' = S_0 + S_1 f + \ldots + S_n f^n + S_{n+1} f^{n+1}$$

où $R_0, \ldots R_n, S_0, \ldots S_{n+1}$ sont des polynomes de degré n dont les coefficients s'expriment linéairement au moyen des indéterminées précédemment introduites.

Substituant ensuite dans l'équation (2°), on voit de suite qu'on devra avoir identiquement

$$R_n - Q_n + (m+1) S_{n+1} + \mu_{n+1} z^\beta = 0$$

$$R_{n-1} - Q_{n-1} + (m+1) S_n + \mu_n z^\beta = 0$$

. . . . . .

$$R_0 - Q_0 + (m+1) S_1 + \mu_1 z^\beta = 0$$

$$(m+1) S_0 + \mu_0 z^\beta = 0$$

en égalant à zéro dans ces $n+2$ égalités les coefficients des diverses puissances de z, on obtiendra les $(n+1)(n+2)$ équations linéaires et homogènes qui permettront de déterminer à un facteur près les coefficients des polynomes Q d'une part, les $n+2$ quantités μ de l'autre.

Supposons par exemple que l'on ait

$$f(z) = z^2 - a^2, \quad n = 1$$

et cherchons la relation linéaire entre les trois polynomes

$g_0(z, m)$, $g_0(z, m+1)$, $g_0(z, m+2)$.

On aura

$$z^2 = a^2 + f\,,\quad z^3 = a^2 z + z f\,;$$

Posons

$$Q = Q_0 + Q_1 f\,,\quad Q_0 = A_0 + B_0 z\,,\quad Q_1 = A_1 + B_1 z$$

en désignant par A_0, B_0, A_1, B_1 des constantes ; on trouvera sans aucune peine

$$R_0 = B_0 + 2B_1 a^2 + 2A_1 z \qquad S_0 = 2B_0 a^2 + 2A_0 z$$

$$R_1 = 3B_1 \qquad S_1 = 2B_0 + 3B_1 a^2 + 2A_1 z$$

$$S_2 = 2B_1\,,$$

et la méthode exposée plus haut fournira de suite les relations suivantes

$$B_1 = 0\,,\quad A_0 = 0\,,\quad A_1 = \mu_2$$

$$(2m+3)B_0 + \mu_1 = 0\,,$$

$$(2m+4)\mu_2 - B_0 = 0$$

$$(2m+2)B_0 a^2 + \mu_0 = 0$$

d'où

$$\mu_1 = -(2m+3)(2m+2)\mu_2\,,$$

$$\mu_0 = -(2m+2)(2m+4)a^2\mu_2\,,$$

Si donc on prend

$$\mu_2 = \frac{1}{1.2.\ldots.(m+2)}$$

on aura

$$\lambda_2 = 1\,,\quad \lambda_1 = -(4m+6)\,,\quad \lambda_0 = -4a^2\,,$$

et la relation de récurrence cherchée sera

$$(23)\qquad g_0(z, m+2) = (4m+6)\,g_0(z, m+1) + 4a^2 g_0(z, m)$$

elle permettra de calculer de proche en proche les polynomes $g_0(z,$

pourvu que l'on en connaisse deux consécutifs : or le calcul direct donne

$$g_0(z, 0) = 1, \quad g_0(z, 1) = 2z + 2$$

en sorte que les polynomes $g_0(z, m)$ peuvent être définis par ces relations et l'équation (23).

On a d'ailleurs, d'après la relation (15) où il faut supposer $z_0 = -a$, $z_0 = a$, $a_0 = 1$, $\beta = 0$

$$(24)\quad e^{-a} g_0(a, m) - e^{a} g_0(-a, m) = -\frac{1}{1.2 \dots m} \int_{-a}^{+a} (z^2 - a^2)^m e^{-z} dz$$

Il est naturel de séparer dans $g(z, m)$ les termes de degré pair par des termes de degré impair en posant :

$$g_0(z, m) = z V_m + U_m$$

les polynomes U_m, V_m entiers en z^2 seront liés par la même relation de récurrence que les polynomes $g_0(z, m)$ et la relation (24) devient alors :

$$a(e^{a} + e^{-a}) V_m(a) - (e^{a} - e^{-a}) U_m(a) = \frac{(-1)^{m+1}}{1.2 \dots m} \int_{-a}^{+a} (a^2 - z^2)^m e^{-z} dz ;$$

Enfin si l'on fait

$$U_m = 2^m P_m, \quad V_m = 2^m Q_m,$$

On reconnait de suite que les polynomes P_m, Q_m définis par les égalités

$$P_m = (2m - 1) P_{m-1} + z^2 P_{m-2}$$

$$Q_m = (2m - 1) Q_{m-1} + z^2 Q_{m-2}$$

$$P_0 = 1, \quad P_1 = 1, \quad Q_0 = 0, \quad Q_1 = 1$$

ont leurs coefficients entiers et positifs, et l'on a

$$(25)\quad a \frac{e^{a} + e^{-a}}{e^{a} - e^{-a}} = \frac{P_m(a)}{Q_m(a)} + \frac{(-1)^{m+1}}{1.2 \dots m\, 2^m (e^{a} - e^{-a}) Q_m(a)} \int_{-a}^{+a} (a^2 - z^2)^m e^{-z} dz$$

égalité qui met en évidence la façon dont la fraction $\frac{P_m(a)}{Q_m(a)}$ approche de $a\frac{e^a+e^{-a}}{e^a-e^{-a}}$ quand m grandit indéfiniment; il est clair que l'on aura

$$\lim_{m=\infty} \frac{P_m(a)}{Q_m(a)} = a\,\frac{e^a+e^{-a}}{e^a-e^{-a}}$$

au moins quand a est réel. Il est alors en effet évident que $Q_m(a)$ va en grandissant quand m augmente. Au reste, les relations qui définissent les polynomes $P_m(a)$, $Q_m(a)$ montrent que l'on a

$$\frac{P_m(a)}{Q_m(a)} = 1 + \cfrac{a^2}{3 + \cfrac{a^2}{5 + \cdots\cdots + \cfrac{a^2}{2m-1}}}$$

La fraction continue illimitée, dont on vient d'écrire une réduite, et qui a pour valeur

$$a\,\frac{e^a+e^{+a}}{e^a-e^{-a}}$$

a été découverte par Lambert [1] qui en a tiré la première démonstration de l'irrationnalité de π et de son carré; elle se réduit à une fraction continue ordinaire quand on a $a=1$, et comme elle n'est pas périodique, on voit qu'elle met déjà en évidence ce fait que

$$\frac{e^2+1}{e^2-1}$$

ne peut être racine d'une équation du second degré à coefficients entiers; il en résulte que e ne peut être racine d'une

---

[1] Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendantes circulaires et logarithmiques (*Mémoire de l'Académie de Berlin*), voir aussi la note sur ce sujet de la *Géométrie de Legendre*.

équation bicarrée, ni par conséquent d'une équation du second degré à coefficients entiers. On sait que Liouville a démontré directement cette proposition.

Faisons encore la remarque suivante sur l'équation (25) en y supposant $a = \frac{\pi i}{2}$, le premier membre est nul; on en conclut que l'équation

$$P_m(a) = 0$$

doit avoir une racine voisine de $\frac{\pi i}{2}$; cette circonstance se manifeste d'assez bonne heure: en effet, on a

$$P_5(a) = 15\,(a^4 + 28\,a^2 + 63),$$

en sorte que $P_5(a)$ admet la racine

$$i\sqrt{14 - \sqrt{133}} = i \times 1,57080\ldots,$$

or on a

$$\frac{\pi}{2} = 1,57079\ldots$$

Il serait aisé de multiplier les remarques de ce genre.

J'indiquerai enfin, pour terminer, la relation de récurrence qui lie les polynomes

$$g_0(z, m),\ g_0(z, m+1),\ g_0(z, m+2),\ g_0(z, m+3)$$

quand on prend pour $f(z)$ la forme

$$f(z) = z(z-1)(z-2)$$

qui n'est autre, pour $n = 2$, que celle que l'on a considérée au paragraphe V, afin d'établir le caractère transcendant du nombre e: elle s'obtient par le procédé qui a été expliqué plus haut; les calculs n'offrent d'ailleurs ni difficulté, ni intérêt.

On trouve (en supprimant l'indice 0)

$$g(z, m+3) = 9\left[1 + 3(m+2)(m+3)\right] g(z, m+2) - 4\,g(z, m) + \frac{6}{3m+5}\left[g(z, m+2) - g(z, m+1) - 2\,g(z, m)\right]$$

On trouve d'ailleurs directement

$$g(z,0) = 1$$
$$g(z,1) = 3z^2 + 2$$
$$g(z,2) = 183z^2 + 30z + 124$$

et l'on déduit de la relation de récurrence

$$g(z,3) = 31509z^2 + 5166z + 21344 ;$$

Ces diverses expressions fournissent comme on l'a expliqué dans le paragraphe 7 des valeurs approchées de e et de e^2 à même dénominateur, à savoir

$$\frac{g(1,m)}{g(0,m)}, \quad \frac{g(2,m)}{g(0,m)}, \quad m = 1, 2, 3, \ldots\ldots$$

Si l'on suppose $m = 2$ on aura

$$\frac{g(1,2)}{g(0,2)} = \frac{337}{124} = 2,717\ldots\ldots$$

$$\frac{g(2,2)}{g(0,2)} = \frac{916}{124} = 7,39\ldots\ldots$$

Si l'on suppose $m = 3$, on aura

$$\frac{g(1,3)}{g(0,3)} = \frac{58019}{21344} = 2,7182814\ldots\ldots$$

$$\frac{g(2,3)}{g(0,3)} = \frac{157712}{21344} = 7,38906\ldots\ldots ;$$

rappelons que l'on a

$$e = 2,7182818\ldots\ldots, \quad e^2 = 7,389056\ldots\ldots$$

On voit que l'ordre d'approximation est bien d'accord avec celui que l'on peut prévoir en partant de la formule (15); cette formule donne par exemple dans le dernier des cas que l'on vient de considérer :

$$e - \frac{g(1,3)}{g(0,3)} = \frac{e}{1.2.3.g(0,3)} \int_0^1 z^3 (z-1)^3 (z-2)^3 \, dz$$

$$e^2 - \frac{g(2,3)}{g(0,3)} = \frac{e^2}{1.2.3.g(0,3)} \int_0^2 z^3 (z-1)^3 (z-2)^3 \, dz$$

Or il est bien aisé de voir que, lorsque z varie entre 0 et 2, $z(z-1)(z-2)$ reste, en valeur absolue, moindre que $\frac{1}{2}$, en sorte que l'une des intégrales doit être, en valeur absolue moindre, que $\frac{1}{8}$, l'autre, moindre que $\frac{2}{8}$, en se reportant à la valeur de $g(0,3)$, on voit que le second membre de la première égalité doit être, en valeur absolue, moindre que $\frac{1}{300\,000}$, tandis que celui de la deuxième doit être moindre que $\frac{1}{60\,000}$.

Si l'on voulait, comme il a été expliqué dans le paragraphe VII, former des fractions rationnelles en x qui approchassent de e^x et e^{2x}, on n'aurait qu'à former les polynomes $G_0(z,m)$ relatifs à la supposition

$$f(z) = z(z-x)(z-2x);$$

On aurait alors la loi de récurrence

$$G(z,m+3) = 3(3m+7)\left(3m+8+\frac{x^2}{3m+5}\right) G(z,m+2)$$

$$- \frac{6x^4}{3m+5} G(z,m+1)$$

$$- 4\left(1+\frac{3}{3m+5}\right) x^6 G(z,m)$$

qui, pour $x=1$, se réduit à la précédente, comme il est bien aisé de le voir, et qui détermine les polynomes $G(z,m)$, dont les coefficients sont des polynomes entiers en x, à coefficients entiers, en supposant, comme on le trouve directement:

$$G(z,0) = 1$$

$$G(z,1) = 3z^2 + (6-6x)z + 6 - 6x + 2x^2$$

$$G(z,2) = (180 + 3x^2) z^2 + (360 - 360x + 36x^2 - 6x^3) z$$

$$+ 360 - 360x + 156x^2 - 36x^3 + 4x^4;$$

Tous les polynomes $G(z, m)$ ainsi formés sont entiers en x et z, avec des coefficients numériques entiers, comme le veut la théorie générale et les fractions que l'on déduit de

$$\frac{G(z, m)}{G(o, m)}$$

en y remplaçant z par x et par $2x$, coïncident, dans les premiers termes de leurs développements suivant les puissances ascendantes de x, avec les développements de e^x, e^{2x}.

Sphères tangentes à quatre plans donnés.

Examinons d'abord le cas où ces plans forment un tétraèdre de sommets 1, 2, 3, 4.

Je vais rappeler un théorème de la théorie des trièdres.

Théorème — Soit un trièdre SABC ; chaque angle dièdre SA, SB, SC admet deux plans bissecteurs ; ces six plans se coupent trois à trois suivant quatre droites, de telle manière que par l'une des droites dite, bissectrice intérieure, passent les trois plans bissecteurs intérieurs des dièdres, tandis que par chacune des trois autres il passe un plan bissecteur intérieur et deux extérieurs.

En effet, il est d'abord facile de voir que les trois plans bissecteurs intérieurs se coupent suivant une même droite.

Car soient α, β, γ ces trois plans ; comme α et β sont intérieurs, ils se coupent suivant une droite Δ_0 intérieure au trièdre, et cette droite est une portion du lieu des points équidistants des trois faces ; le plan mené par Δ_0 et SC est donc un plan bissecteur du dièdre SC et comme il est mené par une droite Δ_0 intérieure au trièdre ce ne peut être que le plan bissecteur intérieur. Cette droite Δ_0 est la bissectrice intérieure.

Soient α', β', γ' les plans bissecteurs extérieurs. La droite Δ_1 d'intersection des plans bissecteurs α intérieur et β' extérieur est un lieu

de points équidistants des trois faces du trièdre. Le plan mené par Δ_A et par SC est donc un plan bissecteur du trièdre SC. Ce ne peut être le plan intérieur γ, car α et γ se coupent suivant Δ_0, et par suite, Δ_A est l'intersection des plans $(\alpha, \beta', \gamma')$. On voit de même qu'il existe une droite Δ_B intersection des plans α', β, γ' et une troisième Δ_C intersection des plans α', β', γ. Le théorème est donc démontré.

Remarque. — Attribuons l'indice +1 aux plans bissecteurs intérieurs, et l'indice −1 aux plans bissecteurs extérieurs. L'indice de α, β, γ sera +1, celui de α', β', γ' sera −1. Donc :

Si l'on considère les systèmes de plans

$$\alpha \quad \beta \quad \gamma ;$$
$$\alpha' \quad \beta' \quad \gamma ;$$
$$\alpha' \quad \beta \quad \gamma' ;$$
$$\alpha \quad \beta' \quad \gamma' ;$$

qui se coupent suivant une même droite Δ_0, Δ_C, Δ_B, Δ_A, le produit de leurs indices est +1.

Cette remarque si simple va nous permettre de traiter sans difficulté la question du tétraèdre.

Prenons en effet un centre O d'une sphère S tangente aux quatre faces du tétraèdre; les plans menés par O et les arêtes $\overline{12}$, $\overline{23}$, $\overline{31}$, $\overline{41}$, $\overline{42}$, $\overline{43}$ seront des plans bissecteurs soit extérieurs soit intérieurs des dièdres qui ont pour arêtes ces droites $\overline{12}, \ldots\ldots \overline{43}$. Soient

$$\varepsilon_{12}, \quad \varepsilon_{23}, \quad \varepsilon_{31}, \quad \varepsilon_{41}, \quad \varepsilon_{42}, \quad \varepsilon_{43}$$

les indices de ces six plans qui vont évidemment se couper trois à trois suivant les droites O1, O2, O3, O4 qui joignent le point O aux sommets du tétraèdre.

Les trois plans qui se coupent suivant une quelconque de ces quatre droites devront, d'après le théorème précédent, avoir un produit d'indices égal à +1

Nous aurons donc :

$$(1)\qquad \begin{aligned} \varepsilon_{12}\ \varepsilon_{13}\ \varepsilon_{14} &= +1 \\ \varepsilon_{23}\ \varepsilon_{24}\ \varepsilon_{21} &= +1 \\ \varepsilon_{34}\ \varepsilon_{31}\ \varepsilon_{32} &= +1 \\ \varepsilon_{41}\ \varepsilon_{42}\ \varepsilon_{43} &= +1 \end{aligned}$$

Ces relations sont au fond surabondantes, puisqu'en faisant leur produit on trouve une identité

$$(\varepsilon_{12}\ \varepsilon_{13}\ \varepsilon_{14}\ \varepsilon_{23}\ \varepsilon_{34}\ \varepsilon_{24})^2 = +1$$

Il est d'ailleurs facile de constater que l'on dispose toujours de trois indices.

Considérons par exemple la face 1, 2, 3; tout centre d'une sphère cherchée s'obtiendra en prenant un plan bissecteur du dièdre 12, un autre du dièdre 23, un autre du dièdre 31.

Ce qui du reste revient à dire que les indices ε_{12}, ε_{23}, ε_{31}, sont arbitraires. Mais alors, comme chaque indice a deux valeurs, nous obtiendrons ainsi $2 \times 2 \times 2 = 8$ solutions.

D'autre part, nous étant donné ε_{12}, ε_{31}, ε_{23} les relations (1) nous donnent les signes des indices des trois autres plans bissecteurs ε_{41}, ε_{42}, ε_{43}, car nous tirons de ces relations

$$(2)\qquad \begin{cases} \varepsilon_{41} = \varepsilon_{12}\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{42} = \varepsilon_{23}\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{43} = \varepsilon_{31}\ \varepsilon_{23} \end{cases}$$

Dès lors nous pouvons former toutes les combinaisons possibles au nombre de 8 des valeurs de ε_{12}, ε_{23}, ε_{31} et leur adjoindre les expressions correspondants de ε_{41}, ε_{42}, ε_{43}, tirées des formules (2).

De là le tableau suivant.

Tableau des sphères tangentes aux faces d'un tétraèdre

	ε_{23}	ε_{31}	ε_{12}	ε_{41}	ε_{42}	ε_{43}	
$\mathcal{C}_0$	+	+	+	+	+	+	Sphère inscrite S_0
$\mathcal{C}_1$	−	+	+	+	−	−	Sphère ex inscrite S_1
$\mathcal{C}_2$	+	−	+	−	+	−	Sphère ex inscrite S_2
$\mathcal{C}_3$	+	+	−	−	−	+	Sphère ex inscrite S_3
$\mathcal{C}_4$	−	−	−	+	+	+	Sphère ex inscrite S_4
$\mathcal{C}_{23,41}$ ...	+	−	−	+	−	−	Sphère contenue dans le comble (23, 41)
$\mathcal{C}_{31,42}$ ...	−	+	−	−	+	−	Sphère du comble (31, 42)
$\mathcal{C}_{12,43}$ ...	−	−	+	−	−	+	Sphère du comble (12, 43)

Nous savons que chaque ligne de ce tableau nous donne les indices des six plans bissecteurs qui se croisent en un centre d'une de nos sphères cherchées. Il est maintenant très facile de se rendre compte de la position de ces points.

Désignons par $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ les bissectrices intérieures des trièdres de sommets 1, 2, 3, 4 formés des faces du tétraèdre. Cherchons ceux des huit centres ci-dessus qui sont sur des bissectrices intérieures.

D'abord le premier appartient à toutes les bissectrices intérieures ; il est en effet sur les plans bissecteurs intérieurs du trièdre de sommet 1, puisque les indices $\varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{14}$ sont positifs ; donc il appartient à Δ_1 ; il appartient pour le même motif à $\Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$. Ce point est évidemment intérieur au tétraèdre, c'est le centre

de la sphère inscrite.

Le second centre est sur la bissectrice Δ_1 intérieure issue du sommet 1, car les indices ε_{13}, ε_{12}, ε_{14} sont tous positifs ; mais il n'est sur aucune autre bissectrice intérieure, ce qui se comprend puisque deux bissectrices intérieures ne se coupent qu'au point précédemment étudié. Pour avoir le point C_1, il faudra, d'après la seconde ligne du tableau, couper Δ_1 par un plan bissecteur extérieur mené par une des arêtes $\overline{23}$, $\overline{42}$ $\overline{43}$; en effet les indices ε_{23}, ε_{42}, ε_{43} sont négatifs ; ces plans bissecteurs extérieurs se coupent au point C_1, qui est situé dans le trièdre tronqué indéfini, compris entre les prolongements des faces 123, 124, 134 (faits au delà de la face 234) et entre la face 234 elle même.

C_1 est le centre d'une sphère S_1, dite ex-inscrite au tétraèdre. Les trois autres lignes du tableau donnent de même trois centres C_2, C_3, C_4 de sphères ex-inscrites, dans lesquelles chaque sommet et face opposée jouent le rôle du sommet 1 et de la face 234 pour la sphère S_1.

Restent les trois autres sphères. Envisageons la première. Son centre $C_{23,41}$ est à l'intersection des deux plans bissecteurs intérieurs des dièdres 23 et 43 qui correspondent à deux arêtes opposées. En effet, ε_{13}, ε_{43} sont positifs. La droite d'intersection de ces deux plans, (laquelle entre parenthèses passe par le point C_0 puisque tous les plans bissecteurs intérieurs passent en C_0) va couper les arêtes $\overline{23}$ $\overline{41}$ en des points M, P situés : M entre 2 et 3, et P entre 4 et 1. Cette droite MP est donc divisée en trois régions : l'une MP intérieure au tétraèdre ; une autre illimitée issue de M, contenue dans le comble formé par le prolongement des faces du tétraèdre 123 et 423 et d'autre part, par les angles opposés aux angles 124, 134 des faces 124, 134 du tétraèdre ; enfin une troisième région de la droite MP est issue de P dans le comble analogue au précédent, mais relatif à l'arête 41 du tétraèdre.

Maintenant le centre $C_{23,41}$ s'obtiendra en coupant cette droite MP (voir la sixième ligne du tableau) par l'un quelconque des plans extérieurs bissecteurs relatifs aux quatre arêtes autres que

$\overline{23}$. $\overline{41}$. C'est dire que le point $C_{23,41}$ ne pourra pas être dans la région intérieure MP, mais qu'il sera dans l'un ou l'autre des deux combles qui se partagent les régions illimitées de la droite MP Nous verrons plus loin dans lequel des deux.

Les deux dernières lignes correspondent aux deux autres couples d'arêtes opposées et fournissent de même chacune une sphère.

Donc, si l'on accepte l'ambiguité relative à celui des deux combles qui contient la sphère tangente qui correspond à un couple d'arêtes opposées, nous sommes parfaitement fixés sur la situation de nos centres, et par suite de nos sphères.

Il suffira de calculer les rayons pour être complètement éclairé sur ce dernier point.

Prenons le point C_0 ; en décomposant le tétraèdre en quatre tétraèdres par le moyen de droites joignant le point C_0 aux sommets, et désignant par Λ_1, Λ_2, Λ_3, Λ_4 les faces du tétraèdre, on trouve, R_0 étant le rayon de la sphère inscrite, hauteur commune des quatre tétraèdres partiels,

$$\frac{1}{3}\left(\Lambda_1+\Lambda_2+\Lambda_3+\Lambda_4\right)R_0 = V = \text{volume du tétraèdre}.$$

d'où

$$R_0 = \frac{3V}{\Lambda_1+\Lambda_2+\Lambda_3+\Lambda_4}$$

Prenons de même le point C_1 ; si nous joignons aux sommets, nous formons quatre tétraèdres tels que la somme de ceux qui ont les faces Ω_2, Ω_3 Ω_4, pour bases est équivalente au volume V du tétraèdre donné augmenté du tétraèdre qui a Λ_1 pour base et C_1 pour sommet. Nous avons donc, R_1 étant le rayon de la sphère S_1, hauteur commune des quatre tétraèdres auxiliaires

$$\frac{1}{3}\left(\Lambda_2+\Lambda_3+\Lambda_4\right)R_1 = V + \frac{1}{3}\Lambda_1 R_1$$

d'où

$$R_1 = \frac{3V}{-\Lambda_1+\Lambda_2+\Lambda_3+\Lambda_4}$$

On sait que dans tout tétraèdre on a

$$-\Lambda_1+\Lambda_2+\Lambda_3+\Lambda_4>0$$

On aura de même les rayons R_2, R_3, R_4 des trois autres sphères ex-inscrites.

Restent les trois sphères des combles.

Prenons le centre $C_{23,41}$; supposons pour fixer les idées qu'il soit dans le comble qui a pour faîte l'arête 23. Construisons encore quatre tétraèdres de sommets $C_{23,41}$ ayant pour bases $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_4$

Si aux tétraèdres de bases Λ_4 et Λ_1 on ajoute le volume du tétraèdre donné, on forme un solide qui peut être encore regardé comme composé des deux tétraèdres qui ont Λ_2 et Λ_3 pour bases. En désignant par $R_{23,41}$ le rayon de la sphère on a donc :

$$\frac{1}{3}(\Lambda_4+\Lambda_1)R_{23,41}+V=\frac{1}{3}(\Lambda_2+\Lambda_3)R_{23,41}$$

d'où

$$R_{23,41}=\frac{3V}{\Lambda_2+\Lambda_3-\Lambda_1-\Lambda_4}$$

La démonstration prouve en même temps que

$$\Lambda_2+\Lambda_3-\Lambda_1-\Lambda_4>0$$

C'est là une conséquence de notre supposition que le point $C_{23,41}$ est dans le comble 23, s'il eut été dans le comble opposé 41, c'est que l'on aurait

$$\Lambda_2+\Lambda_3-\Lambda_1-\Lambda_4<0$$

Donc, le centre $C_{23,41}$ est dans celui des deux combles dont l'arête correspond à la plus grande somme des faces adjacentes.

Si l'on avait

$$\Lambda_2+\Lambda_3=\Lambda_1+\Lambda_4$$

le point $C_{23,41}$ serait rejeté à l'infini.

Les mêmes circonstances sont applicables aux autres couples

d'arêtes opposées.

Observons que si l'on a à la fois

$$\Omega_2 + \Omega_3 = \Omega_1 + \Omega_4$$
$$\Omega_2 + \Omega_1 = \Omega_3 + \Omega_4$$

Il en résulte : $\Omega_2 = \Omega_4$ $\Omega_1 = \Omega_3$

deux faces du tétraèdre sont équivalentes chacune à l'une des deux autres. Dans ce cas, deux des trois dernières sphères disparaissent. Enfin elles disparaissent toutes les trois si les quatre faces sont équivalentes.

$$\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega_3 = \Omega_4$$

Le cas singulier où le tétraèdre dégénère n'offrent aucune difficulté. Le cas où un sommet est rejeté à l'infini se traite de la même manière.

Cependant, le critérium qui achève de fixer la position des dernières sphères (sphère de comble) tombe en défaut.

Reprenons la formule

$$R_{23,41} = \frac{3V}{\Omega_2 + \Omega_3 - \Omega_4 - \Omega_1}$$

Soient h_1, h_2, h_3, h_4 les hauteurs du tétraèdre.

Nous avons $3V = \Omega_1 h_1 = \Omega_2 h_2 = \Omega_3 h_3 = \Omega_4 h_4$ d'où

$$\Omega_1 = \frac{3V}{h_1}, \quad \Omega_2 = \frac{3V}{h_2}, \quad \Omega_3 = \frac{3V}{h_3}, \quad \Omega_4 = \frac{3V}{h_4}$$

et par suite

$$R_{23,41} = \pm \frac{1}{\frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} - \frac{1}{h_4} - \frac{1}{h_1}}$$

$$R_{12,34} = \pm \frac{1}{\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_4} - \frac{1}{h_3}}$$

$$R_{13,24} = \pm \frac{1}{\frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_4}} .$$

Si le point s'éloigne à l'infini, h_1 devient infini, et h_2, h_3, h_4 restent finis.

On a donc

$$R_{23,41} = \pm \frac{1}{\frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} - \frac{1}{h_4}}$$

$$R_{12,34} = \pm \frac{1}{\frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_4} - \frac{1}{h_3}}$$

$$R_{31,24} = \pm \frac{1}{\frac{1}{h_3} - \frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_4}} .$$

Le signe $\pm$ indique qu'il faut prendre la valeur positive. D'ailleurs, si

$$\frac{1}{h_\alpha} + \frac{1}{h_\beta} > \frac{1}{h_\gamma} + \frac{1}{h_\delta}$$

la sphère $S_{\alpha\beta,\gamma\delta}$ est dans le comble α, β.

Ceci posé, considérons la section droite $P_2 P_3 P_4$ du prisme en lequel un trièdre du tétraèdre a dégénéré. Soient a_2, a_3, a_4 les cotés de la section droite en question, Ω son aire, on a

$$2\Omega = h_2 a_2 = h_3 a_3 = h_1 a_4$$

d'où

$$R_{23,41} = \pm \frac{2\Omega}{a_2 + a_3 - a_4}$$

$$R_{12,34} = \pm \frac{2\Omega}{a_2 - a_4 - a_3}$$

$$R_{31,24} = \pm \frac{2-2}{a_3 - a_2 - a_4}$$

et comme dans le triangle de section droite on a :

$$a_2 + a_3 > a_4, \qquad a_4 + a_3 > a_2, \qquad a_4 + a_2 > a_3 .$$

on voit que les trois sphères des combles sont toujours effectives et situées dans les combles 23, 34, 24 ; c'est-à-dire que les arêtes du prisme ne sont jamais le faite d'un comble donnant lieu à une sphère.

Les autres cas particuliers sont très simples, je ne crois pas nécessaire de les envisager ; le lecteur les construira facilement lui-même.

On ne manquera pas de remarquer de quelle utilité nous a été dans la discussion du problème la substitution à la figure du tableau qui la schématise. Grâce à ce tableau, nous sommes à même non-seulement de construire les solutions, et de nous rendre compte de leur état, mais encore d'approfondir la configuration façonnée par les divers centres, par les bissectrices et les plans bissecteurs qui s'y croisent. Cette méthode n'est point un fait isolé dans la géométrie, elle se rattache à cette géométrie de l'ordre qui fut l'objet de la prédilection de Poinsot[1]. Nous allons appliquer à un autre problème une méthode analogue.

Sphères tangentes à quatre sphères données.

Je donne cette leçon immédiatement après celles des sphères tangentes aux faces d'un tétraèdre ; elle en est la généralisation et

---

[1] Voir de Poinsot – Réflexions sur les principes fondamentaux de la théorie des nombres. (Journal de Liouville T X . 1845.

il serait facile de suivre la figure d'un cas à l'autre. Ainsi, nous allons trouver un tableau tout pareil à celui qui nous fournissait les indices des plans bissecteurs passant par un même centre de sphère tangente.

Pour ne pas m'écarter du sujet, je laisserai de côté diverses considérations géométriques et je rappelle que si deux figures F, F' sont homothétiques à une troisième F'', elles sont homothétiques entre elles. Ces trois figures admettent donc deux à deux un centre de similitude, ce qui fait trois centres de similitude, lesquels sont en ligne droite, comme on sait. Il convient encore d'ajouter que sur ces trois homothéties, il y en a deux ou zéro d'inverses, en sorte que si l'on affecte de l'indice + 1 les centres d'homothétie directe, de l'indice − 1 les centres d'homothétie inverse, le produit des indices de nos trois centres en ligne droite est égal à + 1.

Deux sphères ont deux centres de similitude :

Un centre de similitude directe, un centre de similitude inverse. Si les sphères sont tangentes en un point, ce point est un centre de similitude, directe si les sphères sont d'un même côté de leur plan tangent commun (contact extérieur) ; inverse au contraire, si les sphères sont de part et d'autre de leur plan tangent commun, (contact intérieur).

Quatre sphères peuvent être associées deux à deux de six manières différentes. Leur ensemble donne lieu à 12 centres de similitude situés par couples sur les arêtes du tétraèdre formé par les centres des 4 sphères : il y a sur chacune de ces arêtes un centre de similitude directe et un inverse.

Ces 12 centres de similitude forment une configuration des plus remarquables.

Nous allons montrer qu'il existe 8 plans qui coupent les six arêtes du tétraèdre chacune en un des 12 centres de similitude.

Soient en effet 1, 2, 3, 4 nos quatre sphères. Soient C_{12}, C_{13} deux

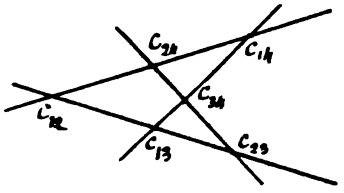
centres de similitude quelconques, l'un des sphères 1 et 2, l'autre des sphères 1 et 3; appelons ε_{12}, ε_{13} les indices de ces centres. Il y a sur la droite C_{12}, C_{13} un centre C_{23} de similitude des sphères 2 et 3, c'est celui de ces deux centres de similitude de ces deux sphères dont l'indice ε_{23} vérifie la relation

$$(1) \quad \varepsilon_{12}\ \varepsilon_{13}\ \varepsilon_{23} = +1.$$

Semblablement, prenons arbitrairement C_{14}, l'un des deux centres de similitude des sphères 1 et 4; soit ε_{14} son indice. Il y a sur $C_{12}C_{14}$ un des deux centres de similitude C_{24} des sphères 2 et 4, c'est celui de ces deux centres dont l'indice ε_{24} vérifie la relation:

$$(2) \quad \varepsilon_{12}.\ \varepsilon_{14}.\ \varepsilon_{24} = +1.$$

Ensuite menons la droite $C_{24}\ C_{23}$, elle contient le centre C_{34} de similitude des sphères 3 et 4 dont l'indice ε_{34} est tel que



$$(3) \quad \varepsilon_{24}\ \varepsilon_{23}\ \varepsilon_{34} = +1.$$

La droite $C_{14}\ C_{13}$ contient, pareillement, celui des centres de similitude C_{34} des mêmes sphères 3 et 4, dont l'indice ε'_{34} vérifie la relation

$$\varepsilon_{14}\ \varepsilon_{13}\ \varepsilon'_{34} = +1.$$

Mais C'_{34} ne diffère pas de C_{34}. En effet, des relations (1) (2) (3) on tire en multipliant

$$\varepsilon_{12}^2.\ \varepsilon_{13}.\ \varepsilon_{14}.\ \varepsilon_{23}^2\ \varepsilon_{24}^2.\ \varepsilon_{34} = +1$$

ou

$$\varepsilon_{13}.\ \varepsilon_{14}.\ \varepsilon_{34} = +1$$

donc $\varepsilon_{34} = \varepsilon'_{34}$. Le point C_{34} est donc à l'intersection des droites $C_{24}\ C_{23}$, $C_{14}\ C_{13}$.

Ainsi, nous étant donné arbitrairement C_{12}, C_{13}, C_{14}, nous en

déduisons trois autres centres C_{23}, C_{34}, C_{42} dont les indices sont liés à ceux des premiers par les relations (1) (2) (3) ; qui sont avec eux dans un même plan Π et forment ensemble un quadrilatère complet.

Ce résultat pouvait être obtenu un peu autrement.

Prenons arbitrairement les trois centres C_{12}, C_{13}, C_{14}, et soit Π le plan qui les contient, ce plan coupe les arêtes $\overline{12}$, $\overline{13}$, $\overline{14}$ en ces points, et les trois autres arêtes en des points C_{23}, C_{34}, C_{42} qui sont aussi des centres de similitude ; en effet, la droite $C_{12}\,C_{13}$ par exemple, doit contenir un centre C_{23}, ce centre sera donc le point où le plan Π coupe l'arête $\overline{23}$ et ainsi des autres. On voit ainsi d'emblée que ces six centres forment un quadrilatère complet.

La considération des indices est cependant précieuse comme on va le voir.

Puisque C_{12}, C_{13}, C_{14} peuvent être pris arbitrairement et qu'il y a un double choix pour chacun, il y a donc $2\times 2\times 2 = 8$ combinaisons, et par suite, il y a 8 plans Π. Ces plans sont appelés plans de similitude. Formons les 8 combinaisons des indices ε_{12}, ε_{13}, ε_{14}, et adjoignons leur les valeurs de ε_{23}, ε_{24}, ε_{34} tirées de (1) (2) (3), nous aurons ainsi le tableau des indices des six centres contenus dans chaque plan d'homothétie ; formons ce tableau.

ε_{12}	ε_{13}	ε_{14}	ε_{23}	ε_{42}	ε_{34}
+	+	+	+	+	+
−	+	+	−	−	+
+	−	+	−	+	−
+	+	−	+	−	−
−	−	−	+	+	+
+	−	−	−	−	+
−	+	−	−	+	−
−	−	+	+	−	−

Ce tableau, on le voit, est tout-à-fait pareil à celui que nous avons déjà rencontré à propos de la sphère tangente aux faces d'un tétraèdre. Il conduit à reconnaître trois sortes de plans de similitude.

1° Le plan dont tous les centres de similitude y contenus sont directs. C'est le plan de similitude directe.

2° Ensuite quatre plans qui contiennent trois centres de similitude directe et trois inverses. On pourrait appeler ces plans, plans de

similitude mixtes.

3° Enfin trois plans qui contiennent chacun deux centres de similitude directe et quatre inverses. On pourrait appeler ces plans, plans de similitude inverse.

Les droites qui contiennent trois centres de similitude s'appellent axes de similitude. Ils sont directs ou inverses selon qu'il ne contiennent pas ou contiennent deux centres de similitude inverse.

L'inspection du tableau nous apprend que

Par un centre de similitude il passe quatre plans de similitude, savoir :

1° Si le centre est direct. Le plan de similitude direct, deux mixtes et un inverse.

2° Si le centre est inverse. Un plan de similitude mixte, et les trois plans de similitude inverse.

Par un centre de similitude il passe six axes de similitude. Tous inverses si le centre est inverse. Trois directs et trois inverses si le centre est direct. Les six axes sont l'intersection deux à deux des quatre plans de similitude qui passent par le centre considéré.

Arrivons maintenant à la question des sphères tangentes à quatre sphères données. Soit O le centre radical des quatre sphères et p la puissance commune de ce point par rapport à ces sphères.

Si Σ désigne une sphère tangente aux quatre sphères 1, 2, 3, 4, l'inversion qui admet O pour pole et p pour puissance transforme Σ en une sphère Σ' tangente, comme Σ aux sphères 1, 2, 3, 4. En effet, la transformation change en elles-mêmes les sphères données 1, 2, 3, 4.

On peut même ajouter que si P_1, P_2, P_3, P_4 sont les points où Σ touche les sphères 1, 2, 3, 4, les points P'_1, P'_2, P'_3, P'_4 où Σ' touche ces mêmes sphères sont les transformés, les inverses des points P_1, P_2, P_3, P_4 (1)

---

(1) Cette idée d'associer les sphères par inversion me fut suggérée en 1886 par M. J. Tannery, à propos du cercle tangent à trois cercles donnés. Dès cette époque, j'ai enseigné à la Sorbonne cette question des cercles d'après un plan identique à celui que je développe ici.

Considérons les sphères i, Σ, Σ'. Le point O est un centre de similitude, comme on sait, des sphères $\Sigma\Sigma'$. Soit ω l'indice de ce centre de similitude. Les points P_i et P'_i sont aussi des centres de similitude des sphères i, Σ et i, Σ'; soient α_i, α'_i leurs indices. La droite $OP_i P'_i$ est un axe de similitude des sphères i, Σ, Σ', qui contient les trois centres d'indices $\alpha_i, \alpha'_i, \omega$, on a donc

$$\alpha_i \alpha'_i \omega = +1$$

ou encore

$$\alpha_i \alpha'_i = \omega .$$

Considérons maintenant les sphères i, K et la sphère Σ; les points P_i, P_K sont des centres de similitude d'indice α_i, α_K des sphères Σ, i ; Σ, K. La droite $P_i P_K$ contient donc un centre C_{iK} de similitude des sphères i et K dont l'indice ε_{iK} est tel que

$$\alpha_i \alpha_K \varepsilon_{iK} = +1,$$

ou

$$\varepsilon_{iK} = \alpha_i \alpha_K .$$

Pareillement, on verra que la droite $P'_i P'_K$ passe par un centre de similitude C'_{iK} des sphères i et K dont l'indice ε'_{iK} est tel que

$$\varepsilon'_{iK} = \alpha'_i \alpha'_K ,$$

on a donc,

$$\varepsilon_{iK} \varepsilon'_{iK} = \alpha_i \alpha'_i \alpha_K \alpha'_K = \omega^2 = +1 .$$

Donc, $\varepsilon'_{iK} = \varepsilon_{iK}$, et C'_{iK} coïncide avec C_{iK}.

Donc enfin :

Les cordes de contact telles que $P_i P_K$ et $P'_i P'_K$ se coupent en un centre de similitude C_{iK} des sphères i et K; on a, de plus,

$$\varepsilon_{iK} = \alpha_i \alpha_K$$

pour déterminer l'indice du point C_{iK}.

En combinant deux à deux les sphères $1, 2, 3, 4$, nous aurons donc six couples de cordes et, par suite, six centres de similitude provenant, chacun d'un couple différent de sphères i et K. Or je dis que ces six points sont dans un même plan, qui ne pourra être dès lors qu'un plan de similitude. Il est facile de démontrer ce point. Il suffit en effet de prouver que les six indices $\varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{14}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{34}, \varepsilon_{24}$ sont liés préci-

sément par les relations (1)(2)(3), ou que l'on a d'une façon générale

$$\varepsilon_{ij}\,\varepsilon_{iK}\,\varepsilon_{jK} = +1$$

et en effet,

$$\varepsilon_{ij}\cdot\varepsilon_{iK}\cdot\varepsilon_{jK} = \alpha_i\alpha_j\cdot\alpha_i\cdot\alpha_K\cdot\alpha_j\alpha_K$$
$$= (\alpha_i\alpha_j\alpha_K)^2 = +1$$

Cela étant, nous avons six cordes $P_i P_K$, coupées chacune par la corde correspondante $P'_i P'_K$ en un point C_{iK}, lequel est un centre de similitude, et les six points C_{iK} ainsi obtenus sont répartis dans un même plan de similitude Π où ils forment, comme nous savons, un quadrilatère complet. La puissance du point C_{iK} par rapport à la sphère Σ est égale au produit $C_{iK}P_i \times C_{iK}P_K$, et par rapport à Σ' il est $C_{iK}P'_i \times C_{iK}P'_K$. Mais d'après une propriété bien connue de l'inversion le quadrilatère plan $P_iP_KP'_iP'_K$ est inscriptible. On a donc

$$C_{iK}P_i \times C_{iK}P_K = C_{iK}P'_i \times C_{iK}P'_K\ ;$$

Donc les points C_{iK} du plan Π ont même puissance par rapport aux sphères Σ et Σ' et, par conséquent :

Le plan Π est le plan radical des sphères Σ et Σ'.

D'après les propriétés bien connues des points anti-homologues, les plans tangents en P_i et P'_i aux sphères Σ et Σ' vont se couper dans le plan radical Π. Mais ces plans sont tangents à la sphère i; donc la polaire de la corde $P_iP'_i$ dans la sphère i est une droite du plan Π, et, par suite, cette corde va passer au pôle Q_i du plan Π par rapport à cette sphère. On peut donc construire de la façon suivante les cordes $OP_iP'_i$. On prendra les pôles Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 du plan Π par rapport à chacune des sphères 1, 2, 3, 4 et on tirera les droites OQ_1, OQ_2, OQ_3, OQ_4.

Telle est la construction si élégante de Gergonne.

Il nous reste à montrer que, réciproquement, un plan de similitude Π quelconque étant pris, la construction de Gergonne fournit en effet quatre sphères tangentes.

Nous devons, de plus, chercher comment les cordes OQ_1, OQ_2, OQ_3, OQ_4 étant menées, il faut associer les points où elles coupent les sphères 1, 2, 3, 4 pour obtenir les points de contact d'une même sphère Σ avec les sphères

données 1, 2, 3, 4.

Je m'appuierai sur la remarque suivante : Deux sphères étant données, 1 et 2 par exemple, ces sphères sont homothétiques par rapport à chacun de leur centre de similitude C_{12}. Mais de plus, si l'on a égard aux propriétés des points dits anti-homologues, on remarquera que ces deux sphères sont aussi homologiques dans une homologie qui admet le point C_{12} pour centre d'homologie, et le plan radical des sphères 1 et 2 pour plan d'homologie. Deux cordes homologiques (alias anti-homologues) se coupent en effet dans le plan radical, tandis que leurs extrémités sont alignées sur le centre C_{12} d'homologie (1).

Prenons donc un plan de similitude Π des sphères 1, 2, 3, 4, plan contenant les centres de similitude C_{12}, C_{13}, C_{14}, C_{23}, C_{42}, C_{34} et soient Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 les pôles de ce plan dans les quatre sphères.

Je mène les cordes OQ_1, OQ_2, OQ_3, OQ_4.

Envisageons les sphères 1 et 2 : soit H_{12} l'homologie de centre C_{12} qui relie la sphère 1 et la sphère 2, et dont le plan de base est le plan radical de ces sphères. Le plan Π est à lui-même son propre homologique puisqu'il passe par le centre C_{12} de l'homologie; les points Q_1, Q_2 pôles de Π dans les sphères 1 et 2 seront donc homologiques l'un de l'autre, et si l'on joint un point quelconque O du plan radical des sphères 1 et 2 aux points Q_1, Q_2 on aura deux droites homologiques OQ_1, OQ_2, car tout point O du plan radical est à lui-même son propre homologique. Soient P_1, P'_1 les points où la corde OQ_1 perce la sphère 1 et P_2, P'_2 les homologiques de ces

---

(1) Si l'on observe que la similitude est une homologie dont le plan d'homologie est à l'infini, on voit que deux sphères peuvent être dites doublement homologiques par rapport à chacun de leurs centres de similitude. D'une façon générale, soient deux quadriques se coupant suivant deux courbes planes, et inscrites, par conséquent dans deux mêmes cônes du second degré. Soient O, O' les sommets de ces cônes α, α' les plans des courbes planes communs. Les quadriques sont homologiques dans quatre homologies qui ont pour centre un des points O ou O' et pour plan de base l'un des plans α, α'.

points ; P_2 et P'_2 seront donc les points où OQ_2 perce la sphère 2 ; de plus P_1 et P_2 seront alignés sur C_{12}, de même P'_1 et P'_2.

En substituant successivement à la sphère 2 les sphères 3, 4, nous aurons deux points P_3, P'_3 où OQ_3 perce la sphère 3, et deux points P_4, P'_4 où OQ_4 perce la sphère 4. Les droites $P_1 P_3$ et $P'_1 P'_3$ vont se couper au centre C_{13} situé dans le plan Π. De même, $P_1 P_4$ et $P'_1 P'_4$ vont se couper au centre C_{14} situé dans ce plan. Nous avons de la sorte associé en deux groupes de 4 ($P_1 P_2 P_3 P_4$) ($P'_1 P'_2 P'_3 P'_4$) les points où OQ_1, OQ_2, OQ_3, OQ_4 percent les sphères 1, 2, 3, 4.

Considérons les sphères Σ et Σ' circonscrites aux deux tétraèdres formés par ces deux groupes de points. Il est évident que Σ et Σ' sont inverses l'une de l'autre dans l'inversion de pole O et de puissance p. En effet P_i et P'_i sont inversés l'un de l'autre dans cette inversion ; les deux tétraèdres étant inverses l'un de l'autre, les sphères circonscrites le sont. Donc O est centre de similitude, et, par conséquent d'homologie des sphères Σ et Σ'. Le plan d'homologie sera le plan radical de ces sphères. Or ce plan est le plan Π. En effet, les cordes $P_1 P_2$, $P'_1 P'_2$ sont homologiques dans cette homologie, et se coupent en C_{12} dans le plan Π ; de même les cordes $P_1 P_3$, $P'_1 P'_3$ et $P_1 P_4$, $P'_1 P'_4$, se coupent en C_{13} et C_{14} dans le plan Π, comme ces points C_{12}, C_{13}, C_{14} ne sauraient être en ligne droite, le plan Π unique qui les contient est le plan d'homologie des sphères Σ et Σ'. C'est donc leur plan radical.

Il est maintenant facile de montrer que Σ et Σ' touchent les sphères 1, 2, 3, 4 aux points P_i et P'_i. En effet, prenons la sphère 1, par exemple, et les sphères Σ et Σ'. Menons en P_1 et P'_1 les plans tangents ϖ_1, ϖ'_1 à la sphère 1.

La corde de contact $P_1 P'_1$ passant au pôle Q_1 du plan Π, les plans ϖ_1, ϖ'_1 vont se couper suivant une

On sait que dans tout tétraèdre on a

$$-\Lambda_1+\Lambda_2+\Lambda_3+\Lambda_4>0$$

On aura de même les rayons R_2, R_3, R_4 des trois autres sphères ex-inscrites.

Restent les trois sphères des comble.

Prenons le centre $C_{23,41}$; supposons pour fixer les idées qu'il soit dans le comble qui a pour faîte l'arête 23. Construisons encore quatre tétraèdres de sommets $C_{23,41}$ ayant pour bases Λ_1, Λ_2, Λ_3, Λ_4

Si aux tétraèdres de bases Λ_4 et Λ_1 on ajoute le volume du tétraèdre donné, on forme un solide qui peut être encore regardé comme composé des deux tétraèdres qui ont Λ_3 et Λ_4 pour bases. En désignant par $R_{23,41}$ le rayon de la sphère on a donc :

$$\frac{1}{3}(\Lambda_4+\Lambda_1)R_{23,41}+V=\frac{1}{3}(\Lambda_2+\Lambda_3)R_{23,41}$$

d'où

$$R_{23,41}=\frac{3V}{\Lambda_2+\Lambda_3-\Lambda_1-\Lambda_4}$$

La démonstration prouve en même temps que

$$\Lambda_2+\Lambda_3-\Lambda_1-\Lambda_4>0$$

C'est là une conséquence de notre supposition que le point $C_{23,41}$ est dans le comble 23, s'il eut été dans le comble opposé 41, c'est que l'on aurait

$$\Lambda_2+\Lambda_3-\Lambda_1-\Lambda_4<0$$

Donc, le centre $C_{23,41}$ est dans celui des deux combles dont l'arête correspond à la plus grande somme des faces adjacentes.

Si l'on avait

$$\Lambda_2+\Lambda_3=\Lambda_1+\Lambda_4$$

le point $C_{23,41}$ serait rejeté à l'infini.

Les mêmes circonstances sont applicables aux autres couples

d'arêtes opposées.

Observons que si l'on a à la fois

$$\mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_4$$
$$\Omega_2 + \Omega_1 = \Omega_3 + \Omega_4$$

Il en résulte : $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_4$ $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_3$

deux faces du tétraèdre sont équivalentes chacune à l'une des deux autres. Dans ce cas, deux des trois dernières sphères disparaissent. Enfin elles disparaissent toutes les trois si les quatre faces sont équivalentes.

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_3 = \mathcal{A}_4$$

Le cas singulier où le tétraèdre dégénère n'offrent aucune difficulté. Le cas où un sommet est rejeté à l'infini se traite de la même manière.

Cependant, le critérium qui achève de fixer la position des dernières sphères (sphère de comble) tombe en défaut.

Reprenons la formule

$$R_{23,41} = \frac{3V}{\mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 - \mathcal{A}_4 - \mathcal{A}_1}$$

Soient h_1, h_2, h_3, h_4 les hauteurs du tétraèdre.

Nous avons $3V = \mathcal{A}_1 h_1 = \mathcal{A}_2 h_2 = \mathcal{A}_3 h_3 = \mathcal{A}_4 h_4$ d'où

$$\mathcal{A}_1 = \frac{3V}{h_1}, \quad \mathcal{A}_2 = \frac{3V}{h_2}, \quad \mathcal{A}_3 = \frac{3V}{h_3}, \quad \mathcal{A}_4 = \frac{3V}{h_4}$$

et par suite

$$R_{23,41} = \pm \frac{1}{\frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} - \frac{1}{h_4} - \frac{1}{h_1}}$$

$$R_{12,34} = \pm \frac{1}{\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_4} - \frac{1}{h_3}}$$

$$R_{13,24} = \pm \frac{1}{\frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_4}} .$$

Si le point s'éloigne à l'infini, h_1 devient infini, et h_2, h_3, h_4 restent finis.

On a donc

$$R_{23,41} = \pm \frac{1}{\frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} - \frac{1}{h_4}}$$

$$R_{12,34} = \pm \frac{1}{\frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_4} - \frac{1}{h_3}}$$

$$R_{31,24} = \pm \frac{1}{\frac{1}{h_3} - \frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_4}} .$$

Le signe $\pm$ indique qu'il faut prendre la valeur positive. D'ailleurs, si

$$\frac{1}{h_\alpha} + \frac{1}{h_\beta} > \frac{1}{h_\gamma} + \frac{1}{h_\delta}$$

la sphère $S_{\alpha\beta,\gamma\delta}$ est dans le comble α, β.

Ceci posé, considérons la section droite $P_2 P_3 P_4$ du prisme en lequel un trièdre du tétraèdre a dégénéré. Soient a_2, a_3, a_4 les cotés de la section droite en question, Ω son aire, on a

$$2\Omega = h_2 a_2 = h_3 a_3 = h_4 a_4$$

d'où

$$R_{23,41} = \pm \frac{2\Omega}{a_2 + a_3 - a_4}$$

$$R_{12,34} = \pm \frac{2\Omega}{a_2 - a_4 - a_3}$$

$$R_{31,24} = \pm \frac{\varrho - r}{a_3 - a_2 - a_4}$$

et comme dans le triangle de section droite on a :

$$a_2 + a_3 > a_4, \qquad a_4 + a_3 > a_2, \qquad a_4 + a_2 > a_3 .$$

on voit que les trois sphères des combles sont toujours effectives et situées dans les combles 23, 34, 24 ; c'est-à-dire que les arêtes du prisme ne sont jamais le faite d'un comble donnant lieu à une sphère.

Les autres cas particuliers sont très simples, je ne crois pas nécessaire de les envisager ; le lecteur les construira facilement lui-même.

On ne manquera pas de remarquer de quelle utilité nous a été dans la discussion du problème la substitution à la figure du tableau qui la schématise. Grâce à ce tableau, nous sommes à même non-seulement de construire les solutions, et de nous rendre compte de leur état, mais encore d'approfondir la configuration façonnée par les divers centres, par les bissectrices et les plans bissecteurs qui s'y croisent. Cette méthode n'est point un fait isolé dans la géométrie, elle se rattache à cette géométrie de l'ordre qui fut l'objet de la prédilection de Poinsot[1]. Nous allons appliquer à un autre problème une méthode analogue.

Sphères tangentes à quatre sphères données.

Je donne cette leçon immédiatement après celles des sphères tangentes aux faces d'un tétraèdre ; elle en est la généralisation et

---

[1] Voir de Poinsot – Réflexions sur les principes fondamentaux de la théorie des nombres. (Journal de Liouville T X . 1845.

il serait facile de suivre la figure d'un cas à l'autre. Ainsi, nous allons trouver un tableau tout pareil à celui qui nous fournirait les indices des plans bissecteurs passant par un même centre de sphère tangente.

Pour ne pas m'écarter du sujet, je laisserai de côté diverses considérations géométriques et je rappelle que si deux figures F, F' sont homothétiques à une troisième F'', elles sont homothétiques entre elles. Ces trois figures admettent donc deux à deux un centre de similitude, ce qui fait trois centres de similitude, lesquels sont en ligne droite, comme on sait. Il convient encore d'ajouter que sur ces trois homothéties, il y en a deux ou zéro d'inverses, en sorte que si l'on affecte de l'indice +1 les centres d'homothétie directe, de l'indice −1 les centres d'homothétie inverse, le produit des indices de nos trois centres en ligne droite est égal à +1.

Deux sphères ont deux centres de similitude :

Un centre de similitude directe, un centre de similitude inverse. Si les sphères sont tangentes en un point, ce point est un centre de similitude, directe si les sphères sont d'un même côté de leur plan tangent commun (contact extérieur) ; inverse au contraire, si les sphères sont de part et d'autre de leur plan tangent commun, (contact intérieur).

Quatre sphères peuvent être associées deux à deux de six manières différentes. Leur ensemble donne lieu à 12 centres de similitude situés par couples sur les arêtes du tétraèdre formé par les centres des 4 sphères : il y a sur chacune de ces arêtes un centre de similitude directe et un inverse.

Ces 12 centres de similitude forment une configuration des plus remarquables.

Nous allons montrer qu'il existe 8 plans qui coupent les six arêtes du tétraèdre chacune en un des 12 centres de similitude.

Soient en effet 1, 2, 3, 4 nos quatre sphères. Soient C_{12}, C_{13} deux

centres de similitude quelconques, l'un des sphères 1 et 2, l'autre des sphères 1 et 3; appelons ε_{12}, ε_{13} les indices de ces centres. Il y a sur la droite C_{12}, C_{13} un centre C_{23} de similitude des sphères 2 et 3, c'est celui de ces deux centres de similitude de ces deux sphères dont l'indice ε_{23} vérifie la relation

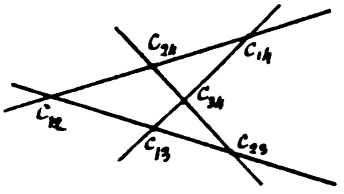
$$(1) \quad \varepsilon_{12}\ \varepsilon_{13}\ \varepsilon_{23} = +1.$$

Semblablement, prenons arbitrairement C_{14}, l'un des deux centres de similitude des sphères 1 et 4; soit ε_{14} son indice. Il y a sur $C_{12}C_{14}$ un des deux centres de similitude C_{24} des sphères 2 et 4, c'est celui de ces deux centres dont l'indice ε_{24} vérifie la relation:

$$(2) \quad \varepsilon_{12}\,.\,\varepsilon_{14}\,.\,\varepsilon_{24} = +1.$$

Enfin menons la droite $C_{24}\,C_{23}$, elle contient le centre C_{34} de similitude des sphères 3 et 4 dont l'indice ε_{34} est tel que

$$(3) \quad \varepsilon_{24}\ \varepsilon_{23}\ \varepsilon_{34} = +1.$$



La droite $C_{14}\,C_{13}$ contient pareillement celui des centres de similitude C_{34} des mêmes sphères 3 et 4, dont l'indice ε'_{34} vérifie la relation

$$\varepsilon_{14}\ \varepsilon_{13}\ \varepsilon'_{34} = +1.$$

Mais C'_{34} ne diffère pas de C_{34}. En effet, des relations (1) .2) (3) on tire en multipliant

$$\varepsilon_{12}^{2}\,.\,\varepsilon_{13}\,.\,\varepsilon_{14}\,.\,\varepsilon_{23}^{2}\ \varepsilon_{24}^{2}\,.\,\varepsilon_{34} = +1$$

ou

$$\varepsilon_{13}\,.\,\varepsilon_{14}\,.\,\varepsilon_{34} = +1$$

donc $\varepsilon_{34} = \varepsilon'_{34}$. Le point C_{34} est donc à l'intersection des droites $C_{34}\,C_{23}$, $C_{14}\,C_{13}$.

Ainsi, nous étant donné arbitrairement C_{12}, C_{13}, C_{14}, nous en

déduisons trois autres centres C_{23}, C_{34}, C_{42} dont les indices sont liés à ceux des premiers par les relations (1) (2) (3) ; qui sont avec eux dans un même plan Π et forment ensemble un quadrilatère complet.

Ce résultat pouvait être obtenu un peu autrement.

Prenons arbitrairement les trois centres C_{12}, C_{13}, C_{14}, et soit Π le plan qui les contient, ce plan coupe les arêtes $\overline{12}$, $\overline{13}$, $\overline{14}$ en ces points, et les trois autres arêtes en des points C_{23}, C_{34}, C_{42} qui sont aussi des centres de similitude ; en effet, la droite $C_{12}\,C_{13}$ par exemple, doit contenir un centre C_{23}, ce centre sera donc le point où le plan Π coupe l'arête $\overline{23}$ et ainsi des autres. On voit ainsi d'emblée que ces six centres forment un quadrilatère complet.

La considération des indices est cependant précieuse comme on va le voir.

Puisque C_{12}, C_{13}, C_{14} peuvent être pris arbitrairement et qu'il y a un double choix pour chacun, il y a donc $2\times2\times2 = 8$ combinaisons, et par suite, il y a 8 plans Π. Ces plans sont appelés plans de similitude. Formons les 8 combinaisons des indices ε_{12}, ε_{13}, ε_{14}, et adjoignons leur les valeurs de ε_{23}, ε_{24}, ε_{34} tirées de (1) (2) (3), nous aurons ainsi le tableau des indices des six centres contenus dans chaque plan d'homothétie ; formons ce tableau.

ε_{12}	ε_{13}	ε_{14}	ε_{23}	ε_{42}	ε_{34}
+	+	+	+	+	+
−	+	+	−	−	+
+	−	+	−	+	−
+	+	−	+	−	−
−	−	−	+	+	+
+	−	−	−	−	+
−	+	−	−	+	−
−	−	+	+	−	−

Ce tableau, on le voit, est tout-à-fait pareil à celui que nous avons déjà rencontré à propos de la sphère tangente aux faces d'un tétraèdre. Il conduit à reconnaître trois sortes de plans de similitude.

1° Le plan dont tous les centres de similitude y contenus sont directs. C'est le plan de similitude directe.

2° Ensuite quatre plans qui contiennent trois centres de similitude directe et trois inverses. On pourrait appeler ces plans, plans a

similitude mixtes.

3° Enfin trois plans qui contiennent chacun deux centres de similitude directe et quatre inverses. On pourrait appeler ces plans, plans de similitude inverse.

Les droites qui contiennent trois centres de similitude s'appellent axes de similitude. Ils sont directs ou inverses selon qu'il ne contiennent pas ou contiennent deux centres de similitude inverse.

L'inspection du tableau nous apprend que

Par un centre de similitude il passe quatre plans de similitude, savoir :

1° Si le centre est direct. Le plan de similitude direct, deux mixtes et un inverse.

2° Si le centre est inverse Un plan de similitude mixte, et les trois plans de similitude inverse.

Par un centre de similitude il passe six axes de similitude. Tous inverses si le centre est inverse. Trois directs et trois inverses si le centre est direct. Les six axes sont l'intersection deux à deux des quatre plans de similitude qui passent par le centre considéré.

Arrivons maintenant à la question des sphères tangentes à quatre sphères données. Soit O le centre radical des quatre sphères et p la puissance commune de ce point par rapport à ces sphères.

Si Σ désigne une sphère tangente aux quatre sphères 1, 2, 3, 4, l'inversion qui admet O pour pole et p pour puissance transforme Σ en une sphère Σ' tangente, comme Σ aux sphères 1, 2, 3, 4. En effet, la transformation change en elles-mêmes les sphères données 1, 2, 3, 4.

On peut même ajouter que si P_1, P_2, P_3, P_4 sont les points où Σ touche les sphères 1, 2, 3, 4, les points P'_1, P'_2, P'_3, P'_4 où Σ' touche ces mêmes sphères sont les transformés, les inverses des points P_1, P_2, P_3, P_4 (1)

---

(1) Cette idée d'associer les sphères par inversion, me fut suggerée en 1886 par M. J. Tannery, à propos du cercle tangent à trois cercles donnés. Dès cette époque, j'ai enseigné à la Sorbonne cette question des cercles d'après un plan identique à celui que je développe ici.

Considérons les sphères i, Σ, Σ'. Le point O est un centre de similitude, comme on sait, des sphères $\Sigma\Sigma'$. Soit ω l'indice de ce centre de similitude. Les points P_i et P'_i sont aussi des centres de similitude des sphères i, Σ et i, Σ'; soient α_i, α'_i leurs indices. La droite $OP_i P'_i$ est un axe de similitude des sphères i, Σ, Σ', qui contient les trois centres d'indices $\alpha_i, \alpha'_i, \omega$, on a donc

$$\alpha_i \alpha'_i \omega = +1$$

ou encore

$$\alpha_i \alpha'_i = \omega .$$

Considérons maintenant les sphères i, K et la sphère Σ; les points P_i, P_K sont des centres de similitude d'indice α_i, α_K des sphères Σ, i ; Σ, K. La droite $P_i P_K$ contient donc un centre C_{iK} de similitude des sphères i et K dont l'indice ε_{iK} est tel que

$$\alpha_i \alpha_K \varepsilon_{iK} = +1,$$

ou

$$\varepsilon_{iK} = \alpha_i \alpha_K .$$

Pareillement, on verra que la droite $P'_i P'_K$ passe par un centre de similitude C'_{iK} des sphères i et K dont l'indice ε'_{iK} est tel que

$$\varepsilon'_{iK} = \alpha'_i \alpha'_K ,$$

on a donc,

$$\varepsilon_{iK} \varepsilon'_{iK} = \alpha_i \alpha'_i \alpha_K \alpha'_K = \omega^2 = +1 .$$

Donc, $\varepsilon'_{iK} = \varepsilon_{iK}$, et C'_{iK} coïncide avec C_{iK}.

Donc enfin :

Les cordes de contact telles que $P_i P_K$ et $P'_i P'_K$ se coupent en un centre de similitude C_{iK} des sphères i et K; on a, de plus,

$$\varepsilon_{iK} = \alpha_i \alpha_K$$

pour déterminer l'indice du point C_{iK}.

En combinant deux à deux les sphères $1, 2, 3, 4$, nous aurons donc six couples de cordes et, par suite, six centres de similitude provenant chacun d'un couple différent de sphères i et K. Or je dis que ces six points sont dans un même plan, qui ne pourra être dès lors qu'un plan de similitude. Il est facile de démontrer ce point. Il suffit en effet de prouver que les six indices $\varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{14}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{34}, \varepsilon_{24}$ sont liés préci-

sément par les relations (1)(2)(3), ou que l'on a d'une façon générale

$$\varepsilon_{ij}\,\varepsilon_{iK}\,\varepsilon_{jK} = +1$$

et en effet,

$$\varepsilon_{ij}\cdot\varepsilon_{iK}\cdot\varepsilon_{jK} = \alpha_i\alpha_j\cdot\alpha_i\cdot\alpha_K\cdot\alpha_j\alpha_K$$
$$= (\alpha_i\alpha_j\alpha_K)^2 = +1$$

Cela étant, nous avons six cordes P_iP_K, coupées chacune par la corde correspondante $P'_iP'_K$ en un point C_{iK}, lequel est un centre de similitude, et les six points C_{iK} ainsi obtenus sont répartis dans un même plan de similitude Π où ils forment, comme nous savons, un quadrilatère complet. La puissance du point C_{iK} par rapport à la sphère Σ est égale au produit $C_{iK}P_i \times C_{iK}P_K$, et par rapport à Σ' il est $C_{iK}P'_i \times C_{iK}P'_K$. Mais d'après une propriété bien connue de l'inversion le quadrilatère plan $P_iP_KP'_iP'_K$ est inscriptible. On a donc

$$C_{iK}P_i \times C_{iK}P_K = C_{iK}P'_i \times C_{iK}P'_K\ ;$$

Donc les points C_{iK} du plan Π ont même puissance par rapport aux sphères Σ et Σ' et, par conséquent :

Le plan Π est le plan radical des sphères Σ et Σ'.

D'après les propriétés bien connues des points anti-homologues, les plans tangents en P_i et P'_i aux sphères Σ et Σ' vont se couper dans le plan radical Π. Mais ces plans sont tangents à la sphère i; donc la polaire de la corde $P_iP'_i$ dans la sphère i est une droite du plan Π, et, par suite, cette corde va passer au pôle Q_i du plan Π par rapport à cette sphère. On peut donc construire de la façon suivante les cordes $OP_iP'_i$. On prendra les pôles Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 du plan Π par rapport à chacune des sphères 1, 2, 3, 4 et on tirera les droites OQ_1, OQ_2, OQ_3, OQ_4.

Telle est la construction si élégante de Gergonne.

Il nous reste à montrer que, réciproquement, un plan de similitude Π quelconque étant pris, la construction de Gergonne fournit en effet quatre sphères tangentes.

Nous devons, de plus, chercher comment les cordes OQ_1, OQ_2, OQ_3, OQ_4 étant menées, il faut associer les points où elles coupent les sphères 1, 2, 3, 4 pour obtenir les points de contact d'une même sphère Σ avec les sphères

données 1, 2, 3, 4.

Je m'appuierai sur la remarque suivante : Deux sphères étant données, 1 et 2 par exemple, ces sphères sont homothétiques par rapport à chacun de leur centre de similitude C_{12}. Mais de plus, si l'on a égard aux propriétés des points dits anti-homologues, on remarquera que ces deux sphères sont aussi homologiques dans une homologie qui admet le point C_{12} pour centre d'homologie, et le plan radical des sphères 1 et 2 pour plan d'homologie. Deux cordes homologiques (alias anti-homologues) se coupent en effet dans le plan radical, tandis que leurs extrémités sont alignées sur le centre C_{12} d'homologie (1).

Prenons donc un plan de similitude Π des sphères 1, 2, 3, 4, plan contenant les centres de similitude C_{12}, C_{13}, C_{14}, C_{23}, C_{42}, C_{34} et soient Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 les pôles de ce plan dans les quatre sphères.

Je mène les cordes OQ_1, OQ_2, OQ_3, OQ_4.

Envisageons les sphères 1 et 2 : soit H_{12} l'homologie de centre C_{12} qui relie la sphère 1 et la sphère 2, et dont le plan de base est le plan radical de ces sphères. Le plan Π est à lui-même son propre homologique puisqu'il passe par le centre C_{12} de l'homologie; les points Q_1, Q_2 pôles de Π dans les sphères 1 et 2 seront donc homologiques l'un de l'autre, et si l'on joint un point quelconque O du plan radical des sphères 1 et 2 aux points Q_1, Q_2 on aura deux droites homologiques OQ_1, OQ_2, car tout point O du plan radical est à lui-même son propre homologique. Soient P_1, P'_1 les points où la corde OQ_1 perce la sphère 1 et P_2, P'_2 les homologiques de ces

---

(1) Si l'on observe que la similitude est une homologie dont le plan d'homologie est à l'infini, on voit que deux sphères peuvent être dites doublement homologiques par rapport à chacun de leurs centres de similitude. D'une façon générale, soient deux quadriques se coupant suivant deux courbes planes, et inscrites, par conséquent dans deux mêmes cônes du second degré. Soient O, O' les sommets de ces cônes α, α' les plans des courbes planes communs. Les quadriques sont homologiques dans quatre homologies qui ont pour centre un des points O ou O' et pour plan de base l'un des plans α, α'.

points ; P_2 et P'_2 seront donc les points où OQ_2 perce la sphère 2 ; de plus P_1 et P_2 seront alignés sur C_{12}, de même P'_1 et P'_2.

En substituant successivement à la sphère 2 les sphères 3, 4, nous aurons deux points P_3, P'_3 où OQ_3 perce la sphère 3, et deux points P_4, P'_4 où OQ_4 perce la sphère 4. Les droites $P_1 P_3$ et $P'_1 P'_3$ vont se couper au centre C_{13} situé dans le plan Π. De même, $P_1 P_4$ et $P'_1 P'_4$ vont se couper au centre C_{14} situé dans ce plan. Nous avons de la sorte associé en deux groupes de 4 ($P_1 P_2 P_3 P_4$) ($P'_1 P'_2 P'_3 P'_4$) les points où OQ_1, OQ_2, OQ_3, OQ_4 percent les sphères 1, 2, 3, 4.

Considérons les sphères Σ et Σ' circonscrites aux deux tétraèdres formés par ces deux groupes de points. Il est évident que Σ et Σ' sont inverses l'une de l'autre dans l'inversion de pole O et de puissance p. En effet P_i et P'_i sont inversés l'un de l'autre dans cette inversion ; les deux tétraèdres étant inverses l'un de l'autre, les sphères circonscrites le sont. Donc O est centre de similitude, et, par conséquent d'homologie des sphères Σ et Σ'. Le plan d'homologie sera le plan radical de ces sphères. Or ce plan est le plan Π. En effet, les cordes $P_1 P_2$, $P'_1 P'_2$ sont homologiques dans cette homologie, et se coupent en C_{12} dans le plan Π ; de même les cordes $P_1 P_3$, $P'_1 P'_3$ et $P_1 P_4$, $P'_1 P'_4$, se coupent en C_{13} et C_{14} dans le plan Π, comme ces points C_{12}, C_{13}, C_{14} ne sauraient être en ligne droite, le plan Π unique qui les contient est le plan d'homologie des sphères Σ et Σ'. C'est donc leur plan radical.

Il est maintenant facile de montrer que Σ et Σ' touchent les sphères 1, 2, 3, 4 aux points P_i et P'_i. En effet, prenons la sphère 1, par exemple, et les sphères Σ et Σ'. Menons en P_1 et P'_1 les plans tangents ϖ_1, ϖ'_1 à la sphère 1.

La corde de contact $P_1 P'_1$ passant au pôle Q_1 du plan Π, les plans ϖ_1, ϖ'_1 vont se couper suivant une

droite Δ contenue dans le plan Π.

Observons encore que le plan φ mené par le milieu I de $P_1 P'_1$ perpendiculairement à cette droite $P_1 P'_1$ contient la droite Δ. Cherchons d'autre part à construire les plans tangents en P_1 et P'_1 aux sphères Σ et Σ'. Ces plans seront homologiques dans l'homologie qui relie les sphères Σ et Σ', ils se couperont donc dans le plan d'homologie Π, plan radical des sphères Σ et Σ'. De plus, d'après une propriété bien connue des figures inverses, ils seront également inclinés sur le rayon vecteur $O P_1 P'_1$. On aura donc la droite suivant laquelle ils se coupent en élevant au milieu I de $P_1 P'_1$ un plan normal φ, et prenant la trace de φ sur le plan Π. Mais c'est Δ que l'on obtient ainsi. Donc les plans menés par Δ et P_1, P'_1, c'est-à-dire les plans ω_1, ω'_1 sont tangents en P_1 et P'_1 aux sphères Σ et Σ'; ce sont du reste, par définition les plans tangents en ces points à la sphère 1. La proposition est donc démontrée.

Remarque. — Nous avons prouvé que les cordes

$P_1 P_2$ et $P'_1 P'_2$ se coupent en C_{12}

$P_1 P_3$ et $P'_1 P'_3$ " C_{13}

$P_1 P_4$ et $P'_1 P'_4$ " C_{14}

il résulte évidemment de ce qui précède, par application d'un raisonnement fait dès le début que, puisque Σ et Σ' touchent les sphères 1, 2, 3, 4, les cordes

$P_2 P_3$ et $P'_2 P'_3$ se coupent en C_{23}

$P_2 P_4$ et $P'_2 P'_4$ " en C_{24}

$P_3 P_4$ et $P'_3 P'_4$ " en C_{34}

Puisque nous avons huit plans de similitude et que chacun donne un couple de sphères, nous aurons en tout 16 sphères tangentes. Il convient toutefois d'observer que les sphères d'un couple peuvent être imaginaires. Si en effet la droite $O Q$, ne coupe pas la sphère 1, aucun des points $P_1 P'_1$; $P_2 P'_2$; $P_3 P'_3$; $P_4 P'_4$ ne sera réel et les deux sphères Σ et Σ' seront

imaginaires. La condition nécessaire et suffisante de réalité est donc que OQ_1 coupe en deux points réels la sphère 1 : il en sera de même alors de OQ_2, OQ_3, OQ_4, vis à vis des autres sphères 2, 3, 4 respectivement.

Il y a un cas où les seize sphères sont toutes réelles, c'est celui où la puissance commune p du point O par rapport aux quatre sphères 1, 2, 3, 4 est négative. Dans ce cas en effet, le point O est intérieur à ces sphères et les droites OQ, coupent toujours la sphère 1.

Dans d'autres cas au contraire les seize sphères sont toutes imaginaires. Cela aura lieu par exemple si deux des sphères sont complètement intérieures l'une à l'autre ; par exemple, 2 intérieur à 1, tandis que l'une des deux autres, 3, par exemple, ne rencontre pas la sphère 1 et lui est extérieure. Dans ce cas en effet, toute sphère tangente à 1 et à 2 est intérieure à 1 et ne peut être, par conséquent, tangente à la sphère 3

L'expression analytique des conditions de réalité, s'obtient en exprimant que OQ_1 rencontre en deux points réels la sphère 1. Nous n'entrerons pas ici dans le détail de cette expression qui appartient plutôt à l'analyse. On pourra consulter à ce sujet une note de la géométrie de Mr Rouché où se trouve exposé la méthode due à Mr Bauer.

Je termine par une marque relative aux contacts.

Je reprends les notations employées au début. On a désigné par ω l'indice du point O en tant que centre de similitude des sphères Σ, Σ' ; et α_i, α'_i étaient les indices des points de contacts P_i, P'_i, de Σ, Σ' avec la sphère i. Nous avions,

$$\alpha_i \alpha'_i = \omega ;$$

ceci nous prouve que les contacts de Σ' avec les sphères 1, 2, 3, 4 sont de même espèce que ceux de Σ ou d'espèce contraire selon que ω est positif ou négatif.

A chaque sphère tangente Σ est attaché un système d'indices $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, cherchons combien il existe de systèmes d'indices

différente.

Puisque α_1 peut être $+1$ ou -1, et de même $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ il y a $2\times 2\times 2\times 2 = 16$ combinaisons d'indices possibles. Soit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ une de ces seize combinaisons, et Σ une sphère tangente qui la réalise. Le système d'indices $\varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{14}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{24}\, \varepsilon_{34}$ du plan de similitude qui fournit Σ sera donné par la formule déjà établie.

$$\varepsilon_{ik} = \alpha_i \alpha_k$$

Or, quels que soient les indices α le système des ε ainsi définis correspond toujours à une des lignes de notre tableau et par suite à un plan de similitude car de

$$\varepsilon_{ik} = \alpha_i \alpha_k$$

on tire

$$\varepsilon_{iq} = \alpha_i \alpha_q$$
$$\varepsilon_{qk} = \alpha_q \alpha_k$$

d'où

$$\varepsilon_{ik}\, \varepsilon_{iq}\, \varepsilon_{qk} = +1,$$

relation qui caractérise précisément les éléments d'une même ligne du tableau.

On pourrait donc être tenté de dire que, tout au moins dans le cas où les seize sphères sont réelles, chacune correspond à l'une de ces seize combinaisons d'indices. Une telle vue serait inexacte.

Considérons en effet la sphère Σ' qui correspond au même plan de similitude que Σ. Selon le signe de ω (déjà défini) les contacts de Σ' seront tous les mêmes que ceux de Σ ou tous d'espèce opposée. D'ailleurs la formule

$$\varepsilon_{ik} = \alpha_i \alpha_k$$

prouve que si l'on change tous les signes des α, c'est-à-dire si l'on prend le système $(-\alpha_1, -\alpha_2, -\alpha_3, -\alpha_4)$ opposé au système $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, les ε_{ik} restent les mêmes, le plan de similitude ne change pas. Ainsi, si l'on groupe les systèmes d'indices $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ en couples de systèmes opposés on obtient huit couples.

et chacun de ces huit couples correspond à l'un des huit plans de similitude.

Maintenant envisageons un couple de systèmes d'indices opposés

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \quad (-\alpha_1, -\alpha_2, -\alpha_3, -\alpha_4)$$

et soit Π le plan de similitude caractérisé par les indices ε_{ik}

$$\varepsilon_{ik} = \alpha_i \alpha_k = (-\alpha_i)(-\alpha_k).$$

Trois choses peuvent arriver. Les deux sphères Σ, Σ' correspondantes à ce plan peuvent être imaginaires. Alors aucun des deux systèmes opposés n'est réalisé. Si par contre les deux sphères Σ, Σ' sont réelles, il peut arriver que le point O soit un centre de similitude directe de Σ et de Σ' et alors Σ et Σ' offriront les mêmes contacts, ω étant positif. Dans ce cas, par conséquent, un des deux systèmes se trouvera réalisé deux fois et l'autre pas du tout. Enfin, O étant centre de similitude inverse, ω est négatif, et Σ et Σ' offrent des dispositions de contact opposées. Dans ce cas, les deux systèmes opposés sont réalisés et dans ce cas seulement. Ainsi, les seize dispositions possibles des contacts ne seront toutes réalisées que si, toutes les sphères étant bien entendu réelles, les huit valeurs de l'indice ω correspondant aux huit couples de sphères (Σ, Σ') sont toutes negatives. En dehors de ce cas, même si toutes les sphères sont réelles, on sera seulement certain que, de deux dispositions opposées, l'une des deux est réalisée.

On a prétendu que la construction de Gergonne donnait tous les cas possibles sans exception.

De fait, si une ou plusieurs sphères se réduisent à des points ou à des plans la construction peut être conservée à l'état limite de la figure: Il y a cependant un cas qui échappe, malgré que les seize sphères subsistent. Considérons quatre sphères 1, 2, 3, 4, et soit S la sphère qui a pour centre le centre radical O et pour rayon

où p est la puissance commune du point O par rapport aux quatre sphères.

Faisons une inversion ayant pour pôle un point M de S. La sphère S devient un plan Π' auquel sont orthogonales les nouvelles sphères 1', 2', 3', 4'. Celles-ci ayant leurs centres dans un même plan, la construction de Gergonne cesse de s'appliquer. Il suffit donc d'une transformation par inversion convenablement choisie pour passer du cas de quatre sphères quelconques à un système de quatre sphères auquel la construction de Gergonne ne s'applique pas.

L'origine de ce fait est facile à expliquer. La solution de Gergonne fait appel à des éléments qui ne se conservent pas par inversion. Tels sont les plans d'homothétie, le centre radical etc..... Une construction où l'on ne ferait figurer que des cercles et des sphères serait invariante par inversion et n'offrirait d'exceptions que dans les cas véritablement exceptionnels où les seize sphères tangentes cessent en effet d'exister. Or tel n'est pas évidemment le cas lorsque les centres des sphères sont dans un même plan.

Pour les cas particuliers que nous ne considérons pas ici, on pourra consulter en premier lieu l'excellent traité de MM. Rouché et de Comberousse. Je recommanderai particulièrement la note sur l'application des déterminants à la géométrie, où se trouve traitée cette question d'après une méthode due à Mr Bauer. Consulter en outre :

Darboux — Sur les relations entre les groupes de points, de cercles et de sphères dans le plan et dans l'espace. (Annales de l'Ecole Normale t. I 2ème série 1872). Sophus Lie — Ueber complexe insbesondere Linien und Kugel complexe Math. Ann. t. V.

Dans ce mémoire Mr Lie rattache la question de la sphère tangente à quatre sphères données, à un mode général de transformation

La méthode consiste au fond à séparer sur une sphère les unes des autres les génératrices rectilignes imaginaires des deux systèmes. M^r. Stéphanes est revenu sur ce sujet dans les Comptes-Rendus le 23 Mai 1881, et a rattaché ces considérations aux cycles de Laguerre.

Sur l'équation en λ.

Soient $f(x, y, z) = 0$ $g(x, y, z) = 0$ deux coniques dont on a rendu les équations homogènes en sorte que

$$f = A x^2 + A' y^2 + A'' z^2 + 2 B y z + 2 B' z x + 2 B'' x y$$

$$g = A_1 x^2 + A'_1 y^2 + A''_1 z^2 + 2 B_1 y z + 2 B'_1 z x + 4 B''_1 x y.$$

En éliminant x ou y entre ces équations on constate, comme on sait l'existence de quatre points communs à ces coniques. Dans certains cas ces points pourront coïncider ou être rejetés à l'infini. Mais l'emploi des coordonnées homogènes supprime les difficultés qui pourront naître de cette dernière circonstance.

Les coniques comprises dans l'équation

$$f + \lambda g = 0$$

forment ce que l'on appelle un faisceau, elles passent toutes par les points communs aux coniques $f = 0$, $g = 0$.

Ecrivons le discriminant de la forme $f + \lambda g$,

$$F(\lambda) = \begin{vmatrix} A + \lambda A_1 & B'' + \lambda B''_1 & B' + \lambda B'_1 \\ B'' + \lambda B''_1 & A' + \lambda A'_1 & B + \lambda B_1 \\ B' + \lambda B'_1 & B + \lambda B_1 & A'' + \lambda A''_1 \end{vmatrix} ;$$

l'équation $F(\lambda) = 0$ exprime que la forme $f + \lambda g$ est réductible à deux carrés, ou que la conique $f + \lambda g = 0$

est un couple de droites. Soient α, α', α'', β, β', β'' les mineurs du déterminant $F(\lambda)$ correspondant aux éléments $A+\lambda A_1$, $A'+\lambda A'_1$, $A''+\lambda A''_1$, $B+\lambda B_1$, $B'+\lambda B'_1$, $B''+\lambda B''_1$. Si tous les mineurs $\alpha, \alpha', \alpha'', \beta, \beta' \beta''$ sont nuls, la forme $f+\lambda g$ est un carré parfait et au lieu de représenter une paire de droites, représente une droite unique dite droite double. Nous pouvons signaler d'ores et déjà la relation importante.

$$(1)\quad F'(\lambda) = \frac{dF}{d\lambda} = \alpha A_1 + \alpha' A'_1 + \alpha'' A''_1 + 2\beta B_1 + 2\beta' B'_1 + 2\beta'' B''_1.$$

Si l'on a $F(\lambda)=0$, la conique $f+\lambda g$ possède un point double (intersection des deux droites du couple) dont les coordonnées vérifient les équations compatibles.

$$(2)\quad \begin{cases} (A+\lambda A_1)x + (B''+\lambda B''_1)y + (B+\lambda B_1)z = 0 \\ (B''+\lambda B''_1)x + (A'+\lambda A'_1)y + (B'+\lambda B'_1)z = 0 \\ (B+\lambda B_1)x + (B'+\lambda B'_1)y + (A''+\lambda A''_1)z = 0. \end{cases}$$

Si cependant les mineurs $\alpha, \ldots\ldots \beta''$ sont tous nuls, tout point de $f+\lambda g$ est un point double; les équations (2) se réduisent à une seule.

Nous nous appuierons dans ce qui va suivre sur quelques propriétés générales des points doubles que nous allons démontrer.

Théorème I — Un point double admet la même polaire dans toutes les coniques du faisceau.

Soient en effet, $f+\rho g$, $f+\rho' g$ deux coniques du faisceau; x, y, z les coordonnées d'un point double de la conique $f+\lambda g$, coordonnées données par les équations (2). Ces équations peuvent s'écrire

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial z} + \lambda \frac{\partial g}{\partial z} = 0,$$

et on en déduit.

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}+\rho\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial x}+\rho'\frac{\partial g}{\partial x}}=\frac{\frac{\partial f}{\partial y}+\rho\frac{\partial g}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial y}+\rho'\frac{\partial g}{\partial y}}=\frac{\frac{\partial f}{\partial z}+\rho\frac{\partial g}{\partial z}}{\frac{\partial f}{\partial z}+\rho'\frac{\partial g}{\partial z}}=\frac{\rho-\lambda}{\rho'-\lambda}$$

ce qui démontre le théorème.

Remarque. — Il y a lieu d'insister sur ce fait que le théorème est vrai quand même la conique $f+\lambda g$ aurait une infinité de points doubles.

Réciproquement, si l'on cherche un point (x, y, z) qui ait même polaire dans les deux coniques f et g, on est conduit à écrire :

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial x}}=\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial g}{\partial y}}=\frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\frac{\partial g}{\partial z}},$$

c'est-à-dire les équations (2), pourvu qu'on appelle $-\lambda$ la valeur commune de ces rapports.

Théorème II. — Deux points doubles O, O' appartenant à deux coniques singulières distinctes $f+\lambda g$, $f+\lambda' g$ du faisceau, sont conjugués par rapport à toutes les coniques du faisceau.

Soient (x, y, z) (x', y', z') les coordonnées des points O, O'. Il faut démontrer que

$$\frac{\partial f}{\partial x}x'+\frac{\partial f}{\partial y}y'+\frac{\partial f}{\partial z}z'=L=0$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}x'+\frac{\partial g}{\partial y}y'+\frac{\partial g}{\partial z}z'=M=0.$$

J'observe à cet effet qu'en multipliant par x', y', z' les équations (2) et ajoutant il vient

$$L+\lambda M=0$$

Si maintenant, dans (2) on change λ en λ' et x, y, z en x', y', z', puis que l'on multiplie par x, y, z et que l'on ajoute on aura

$$\left(x\frac{\partial f}{\partial x'}+y\frac{\partial f}{\partial y'}+z\frac{\partial f}{\partial z'}\right)+\lambda'\left(x\frac{\partial g}{\partial x'}+y\frac{\partial g}{\partial y'}+z\frac{\partial g}{\partial z'}\right)=0.$$

Mais L et M sont symétriques par rapport à x et x', y et y', z et z', d'après une propriété bien connue des forces quadratiques. On a donc

$$L + \lambda' M = 0,$$

d'où en rapprochant de $L + \lambda M = 0$ et observant que λ' est différent de λ, par hypothèse,

$$L = 0, \quad M = 0.$$

Théorème III — Si λ est une racine double de $F(\lambda) = 0$ n'annulant pas à la fois tous les mineurs $\alpha, \alpha', \alpha'', \beta, \beta', \beta''$, la conique $f + \lambda g$ se compose de deux droites distinctes qui se coupent en un point commun aux coniques du faisceau.

On tire en effet des équations (2) en négligeant la première de ces équations

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta''} = \frac{z}{\beta'},$$

puis en négligeant la seconde

$$\frac{x}{\beta''} = \frac{y}{\alpha'} = \frac{z}{\beta}$$

et en négligeant enfin la troisième

$$\frac{x}{\beta'} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\alpha''}.$$

En rapprochant ces équations on trouve

$$\frac{x^2}{\alpha} = \frac{y^2}{\alpha'} = \frac{z^2}{\alpha''} = \frac{yz}{\beta} = \frac{zx}{\beta'} = \frac{xy}{\beta''}$$

et l'on peut ajouter

$$= \frac{g(x, y, z)}{\alpha A_1 + \alpha' A'_1 + \alpha'' A''_1 + 2\beta B_1 + 2\beta' B'_1 + 2\beta'' \beta''_1}$$

ou d'après la formule (1).

$$= \frac{g(x, y, z)}{F'(\lambda)}$$

Si donc $F'(\lambda) = 0$ sans que $\alpha, \alpha', \alpha'' \beta, \beta', \beta''$ soient tous nuls, on a forcément $g(x, y, z) = 0$. D'ailleurs, des équations (2) multipliées par x, y, z et ajoutées on tire

$$f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z) = 0,$$

donc puisque $g = 0$, on a aussi $f = 0$.

Réciproquement, si les deux droites d'un couple sont distinctes et se coupent en un point o de l'intersection commune des coniques du faisceau, le couple correspond à une racine multiple de l'équation $F(\lambda) = 0$, qui n'annule pas tous les mineurs.

Ce dernier point est évident puisque les deux droites du couple sont distinctes. Il reste à prouver que $F'(\lambda) = 0$. Or en effet nous avons :

$$\frac{x^2}{\alpha} = \frac{y^2}{\alpha'} = \frac{z^2}{\alpha''} = \frac{yz}{\beta} = \frac{zx}{\beta'} = \frac{xy}{\beta''} = \frac{g(x,y,z)}{F'(\lambda)}$$

Comme la valeur commune des rapports ne saurait être zéro, et que, par hypothèse $g(x, y, z) = 0$, on a donc $F'(\lambda) = 0$.

Nous avons maintenant toutes les données nécessaires à la discussion.

A)_ Si les trois racines de $F(\lambda) = 0$ sont distinctes, il y a dans le faisceau trois couples de droites distincts et dans aucun de ces couples les deux droites qui le forment ne sont confondues.

En effet, d'abord il y a trois couples distincts puisqu'il y a trois racines distinctes et que chacune fournit un couple différent. En second lieu chacun de ces couples comporte deux droites distinctes. Sans cela tous les $\alpha, \alpha', \alpha'', \beta, \beta', \beta''$ seraient nuls, et, d'après la relation (1), λ serait une racine double.

L'intersection se compose alors de quatre points distincts. Soient en effet Δ, Δ_0 et Δ', Δ'_0 deux des trois couples du faisceau. Il est impossible que Δ', par exemple passe par l'intersection de Δ et de Δ_0. car ce point o appartenant aux deux coniques singulières (Δ, Δ_0) et $(\Delta' \Delta'_0)$ appartiendrait à l'intersection. Le point double o du couple Δ, Δ_0 étant un point de l'intersection ce couple devrait correspondre à une racine multiple de l'équation $F(\lambda) = 0$ ce qui est contre l'hypothèse. Enfin nous devons exclure l'hypothèse où une droite du couple (Δ, Δ_0) coïnciderait avec une droite du couple

(Δ', Δ'_0) ; dans ce cas en effet la droite Δ', supposée coïncidente avec Δ, passerait au point de rencontre de Δ et de Δ_0.

Nous voyons donc que dans le cas de trois racines simples les deux droites du couple (Δ, Δ_0) seront coupées par les deux droites du couple (Δ', Δ'_0) en quatre points distincts, et ces points seront évidemment les points communs à $f=0$, $g=0$.

Ajoutons que les points doubles forment un triangle dont les sommets O, O', O'' sont conjugués deux à deux par rapport à toutes les coniques du faisceau (Théorème II). Ce triangle O, O', O'' est donc conjugué à la fois par rapport à toutes les coniques du faisceau.

B)– Supposons maintenant une racine double n'annulant pas tous les mineurs $\alpha, \alpha', \alpha'', \beta, \beta', \beta''$. Soit λ la racine double, λ' la racine simple. A λ correspondra un couple de droites distinctes Δ, Δ_0 se coupant en un point O de l'intersection ; d'autre part, à λ' correspondra un couple de droites distinctes, car les $\alpha \ldots \beta''$ ne sont pas tous nuls sans quoi $F'(\lambda')$ devrait être nul d'après la formule (1) ; soit O' le point de rencontre des droites de ce second couple que je désignerai par Δ', Δ'_0.

Une de ces droites, par exemple Δ', doit joindre O' au point O. Maintenant nous devons observer que 1°.– O est sur les coniques du faisceau, et par suite, la polaire commune du point O (Théorème I) dans toutes ces coniques se réduit à la tangente en O, qui est ainsi la même pour toutes ces coniques, en sorte que toutes les coniques du faisceau ont même tangente au point O. 2°.– J'ajoute que OO' est cette tangente. En effet, O et O' sont conjugués par rapport à toutes les coniques du faisceau (Théorème II). Donc O' est sur la polaire du point O, c'est-à-dire sur la tangente commune.

Il est dès lors bien facile de se rendre compte de la disposition des deux couples (Δ, Δ_0) (Δ', Δ'_0) et des points d'intersection. Nous voyons en effet que des deux droites Δ', Δ'_0, une, Δ', passe au point O' de rencontre de Δ et Δ_0, tandis que l'autre droite Δ'_0 du même

couple va couper Δ et Δ_0 en deux points distincts. Les coniques du faisceau ont donc en commun ces deux points et se touchent en outre au point O.

Le triangle conjugué commun cesse ici d'exister.

C/_ Maintenons le cas d'une racine double λ, mais supposons de plus que cette racine annule tous les mineurs $\alpha, \alpha', \alpha''$ β, β', β''. Alors $f + \lambda g$ est un carré parfait; dans ce cas le couple se réduit à une droite unique Δ (droite double).

Soit λ' la racine simple et (Δ', Δ'_0) le couple de droites distinctes correspondant. Ces droites se coupent en un point O' et d'après le théorème II, tout point de Δ étant un point double est conjugué de O' par rapport à toutes les coniques du faisceau. La droite Δ, est donc la polaire du point O' dans toutes ces coniques.

Cette droite Δ coupe les coniques du faisceau en deux points distincts, sans quoi, étant tangente, son pôle O' appartiendrait à l'intersection, et λ' serait racine double. D'ailleurs ces deux points d'intersection P, Q sont les mêmes pour toutes les coniques du faisceau qui de plus ne se couperont pas ailleurs qu'en ces deux points puisque la droite Δ contient tous les points d'intersection. Cela étant il est clair que si l'on mène $O'P$ $O'Q$ on aura précisement les droites Δ', Δ'_0 du couple qui correspond à λ', et ces droites se trouveront ainsi, par construction, tangentes en P et Q à toutes les coniques. Celles-ci seront donc toutes tangentes en ces deux points P, Q et comme on l'a vu ne se couperont nulle autre part.

D/_ Supposons maintenant que l'on ait une racine triple n'annulant pas les mineurs $\alpha, \alpha', \alpha'', \beta, \beta', \beta''$. Reprenons le cas d'une racine double n'annulant pas les mineurs. Nous avions deux coniques tangentes en un point O et se coupant en deux points P, Q; le couple des droites OP, OQ est celui qui correspondait à la racine double, celui qui correspondait à la racine simple était formé de la tangente OO' au point O aux

coniques, et de la droite PQ. Si la racine simple tend à se rapprocher de la racine double, les deux couples (OP, OQ) et (OO', PQ) tendent à se confondre; il faudra donc que OP ou OQ, par exemple OP, vienne se confondre avec la tangente OT au point O. C'est dire que des deux points P, Q, il y en a un P qui doit venir se confondre avec le point O où les coniques avaient déjà un contact du premier ordre. On dit dans ce cas que les coniques ont un contact du second ordre au point O. Elles se coupent en outre en un point Q et le couple unique du faisceau se compose alors de la droite OQ et de la tangente OT au point O.

E. — Enfin il se pourrait que la racine triple annulât les mineurs. Dans ce cas il faudra que la droite OQ elle-même vienne coïncider avec la tangente OT. Le point Q viendra donc coïncider à son tour avec le point O. Les coniques auront ainsi un contact du troisième ordre au point O.

Il reste enfin un dernier cas, qui est celui où l'équation $F(\lambda) = 0$ aurait lieu identiquement. Toutes les coniques du faisceau

$$f + \lambda g = 0$$

seraient dans ce cas des couples de droites. Les coniques f et g, en particulier seront des couples de droites. Les équations (2) seront compatibles pour toutes les valeurs de λ, mais les mineurs $\alpha, \alpha', \alpha''$, β, β', β'' ne sauraient être tous nuls identiquement, quelque soit λ.

En effet, si cela avait lieu, f et g seraient en particulier des carrés parfaits

$$f = P^2, \quad g = Q^2,$$

et, comme on exclue l'hypothèse où f et g seraient proportionnels il est impossible que P et Q soient proportionnels. Si l'on forme alors

$$f + \lambda g = P^2 + \lambda Q^2$$

on a une forme quadratique réductible sans doute à deux carrés, mais qui ne saurait être un carré parfait tant que λ ou $\frac{1}{\lambda}$ sont différents

de zéro. Cela étant, les mineurs $\alpha, \alpha', \alpha'', \beta, \beta', \beta''$ ne peuvent être nuls tous à la fois pour toute valeur de λ.

Nous pouvons dès lors écrire les équations (2) sous la forme

$$\frac{x^2}{\alpha} = \frac{y^2}{\alpha'} = \frac{z^2}{\alpha''} = \frac{yz}{\beta} = \frac{zx}{\beta'} = \frac{xy}{\beta''} = \frac{g(x,y,z)}{F'(\lambda)},$$

Mais puisque $F(\lambda)$ est nul identiquement on a aussi $F'(\lambda)=0$ d'où, puisque les mineurs ne sont pas tous nuls, $g(x,y,z)=0$, et, par suite aussi $f(x,y,z)=0$, car des équations (2) on tire

$$f(x,y,z) + \lambda\, g(x,y,z) = 0.$$

Il est ainsi prouvé que si $F(\lambda)$ est nul identiquement, toute conique

$$f + \lambda\, g = 0$$

a un point double unique (sauf valeurs particulières de λ) et de plus ce point double fait partie de l'ensemble des points communs aux coniques du faisceau. Il y a deux cas à distinguer selon que ce point double est fixe ou mobile.

F/- Supposons le fixe d'abord. Le faisceau se composera alors de couples de droites issues de ce point fixe.

Si l'on a par exemple

$$g = P^2 + Q^2$$

on aura

$$f = l P^2 + 2m PQ + n Q^2$$

et

$$f + \lambda g = (l+\lambda) P^2 + 2m PQ + (n+\lambda) Q^2$$

G/- Supposons, au contraire, mobile le point double des coniques du faisceau. Soient (Δ, Δ_0) (Δ', Δ'_0) deux couples de droites contenus dans le faisceau

$$f + \lambda g = 0;$$

on peut supposer que le premier soit justement f et le second g; soient O et O' les points doubles de ces couples. Le point O' doit être forcément sur l'une des droites Δ, Δ_0 car, nous le savons, tous les

points doubles sont des points communs aux coniques du faisceau. Supposons donc que O' soit sur Δ; la droite Δ sera donc OO'. De même O est sur l'une des droites Δ', Δ'_0, par exemple sur Δ', donc Δ' est la droite $O'O$. Ainsi Δ et Δ' coïncident, et l'on a

$$f = \Delta . \Delta_0$$
$$g = \Delta . \Delta'_0$$

d'où

$$f + \lambda g = \Delta (\Delta_0 + \lambda \Delta'_0).$$

En resumé les coniques du faisceau sont constituées chacune par une droite fixe Δ adjointe à une droite d'un faisceau de droites

$$\Delta_0 + \lambda \Delta'_0 = 0$$

Telle est la discussion générale des circonstances que peut présenter l'équation en λ. L'idée de s'appuyer dans cette discussion sur les propriétés des points doubles a été introduite il y a longtemps par Mr Darboux dans l'enseignement. Mais il nous a semblé qu'il y avait tout avantage à introduire plus complètement qu'on ne le fait d'habitude la considération des sommets du triangle conjugué commun.

Nous avons déjà observé que dans le cas A il y avait un véritable triangle conjugué commun. Dans le cas B ce triangle disparaît. Dans le cas C, où l'on associe à tout point M de Δ son conjugué harmonique N par rapport au segment PQ, le triangle $O'MN$ est conjugué à la fois dans toutes les coniques du faisceau. Il y a donc dans ce cas une infinité de triangles conjugués communs. Dans le cas D, le triangle n'existe plus, ses trois sommets sont reçus au point O. Par contre, dans le cas E, tous les points de la tangente commune Δ au point O sont des points doubles. Chacun a donc (Théorème I) même polaire par rapport à toutes les coniques du faisceau. Mais il n'y a pas davantage de triangle conjugué commun.

La question de realité a été réservée à dessein.

Tout ce que nous venons de dire s'applique en effet au cas de coefficients imaginaires. Si les coefficients de f, g sont supposés réels il y a lieu alors de se rendre compte des conditions de réalité des points de rencontre.

Discussion relative à la réalité.

A. — Dans le cas A où les trois racines sont inégales, les racines peuvent être réelles toutes les trois, ou bien une réelle et deux imaginaires conjuguées.

1°. - Si les trois racines de $F(\lambda)$ sont réelles et inégales, les coniques f et g se coupent en quatre points réels ou en quatre points imaginaires conjugués par deux.

En effet. Soient λ, λ' deux racines réelles de $F(\lambda)=0$, $(\Delta,\Delta_0)(\Delta',\Delta'_0)$ les deux couples de droites distinctes correspondants, en sorte que

$$f+\lambda g = \Delta.\Delta_0$$
$$f+\lambda' g = \Delta'.\Delta'_0.$$

Les coefficients de $f+\lambda g$ et de $f+\lambda' g$ étant réels les droites Δ et Δ_0 sont réelles ou imaginaires conjuguées, de même pour Δ' et Δ'_0.

Si $\Delta, \Delta_0, \Delta', \Delta'_0$ sont réelles, les quatre points $\Delta\Delta'$ (intersection de Δ et de Δ') $\Delta\Delta'_0$, $\Delta_0\Delta'$, $\Delta_0\Delta'_0$ sont réels, les quatre points d'intersection sont réels.

Si Δ, Δ_0 sont réelles et Δ', Δ'_0 imaginaires conjuguées, ces deux dernières droites coupent Δ en deux points $\Delta\Delta'$, $\Delta\Delta'_0$ qui sont imaginaires conjugués, et coupent Δ_0 aussi en deux points $\Delta_0\Delta'$, $\Delta_0\Delta'_0$ imaginaires conjugués.

Resterait enfin l'hypothèse où Δ et Δ_0 seraient imaginaires conjuguées ainsi que Δ' et Δ'_0. Mais alors Δ et Δ' se couperont en un point imaginaire $\Delta\Delta'$ qui admettra comme conjugué le point $\Delta_0\Delta'_0$ intersection des droites Δ_0, Δ'_0 imaginaires conjuguées

de Δ, Δ'. Pareillement, les deux points $\Delta\Delta'_0$ et $\Delta_0\Delta'$ seront imaginaires conjugués.

Cette hypothèse revient d'ailleurs à la précédente, car soit λ'' la troisième racine à laquelle correspond le couple Δ'', Δ''_0. Ces deux droites sont réelles. En effet Δ'' doit contenir deux des quatres points d'intersection et Δ''_0 les deux autres. Il faut donc pour que ce couple soit distinct des précédents qu'il soit formé des droites de jonction des points $\Delta\Delta'$ et $\Delta_0\Delta'_0$, $\Delta_0\Delta'$ et $\Delta\Delta'_0$. Ces deux couples de points étant composés de points imaginaires conjugués les droites Δ'', Δ''_0 qui portent chacune l'un d'eux sont reelles.(1)

2°. — Admettons maintenant l'existence d'une racine réelle λ et de deux racines imaginaires conjuguées λ', λ''.

Je dis que dans ce cas deux des quatre points de rencontre sont reels et deux imaginaires. Soit en effet $\lambda' = p + iq$. Il est impossible que λ' fournisse un couple de sécantes réel (je veux dire à coefficients réels). Il faudrait en effet que $f + (p+iq)g$ fut proportionnel à une expression telle que $M^2 \pm N^2$ où M, N sont deux fonctions linéaires réelles. Ecrivons donc

$$f + (p+iq)g = (r+is)(M^2 \pm N^2) ;$$

on aurait aussi, en changeant i en $-i$,

$$f + (p-iq)g = (r-is)(M^2 \pm N^2)$$

d'où

$$f + pg = r(M^2 \pm N^2)$$
$$qg = s(M^2 \pm N^2).$$

On n'a pas $s = 0$ car g serait nul identiquement. On a donc

$$f + pg = \frac{qr}{s} g$$

---

(1) L'existence d'un couple de sécantes réelles n'est pas évidente a priori. C'est un bon exercice de prouver analytiquement que des trois racines de $F(\lambda)$ il y en a toujours une qui donne pour $f + \lambda g$ une différence de carrés

ou

$$f = \left(-p + \frac{q^2}{3}\right) g;$$

Si $-p + \frac{q^2}{3}$ est nul f est identiquement nul, et dans le cas contraire, f est proportionnel à g, tous cas à exclure.

Il suit de là que si l'on écrit

$$f + (p + iq) g = P.Q,$$

les droites P, Q sont imaginaires non conjuguées,

Soient P_0, Q_0 les fonctions conjuguées de P, Q, on aura

$$f + (p - iq) g = P_0 Q_0.$$

Ainsi on aura

$$f + \lambda' g = P Q. \quad f + \lambda'' g = P_0 Q_0.$$

Les points de rencontre de f et de g sont les quatre points PP_0, QQ_0, PQ_0, QP_0. Le point PP_0 intersection de deux droites conjuguées est réel; de même QQ_0. Les points PQ_0 et QP_0 sont imaginaires conjugués.

Considérons alors le couple de droites Δ, Δ_0 correspondant à la racine réelle λ. Le couple doit être distinct des deux autres, et la droite Δ doit joindre deux des quatre points PP_0, QQ_0, PQ_0, QP_0 la droite Δ_0 les deux autres. Donc Δ doit joindre par exemple les deux premiers points réels PP_0, QQ_0, et Δ_0 les deux autres qui sont imaginaires conjuguées. Donc enfin Δ et Δ_0 sont réelles

Il est ainsi prouvé 1° que deux des points de rencontre sont réels et les deux autres imaginaires conjugués. 2° que la racine réelle unique fournit toujours un couple de droites réelles.

Pour terminer ce qui concerne le cas des racines inégales observons:

1° Qu'il y a toujours un couple de sécantes réelles.

2° que les trois sommets du triangle conjugué commun sont réels, si les racines sont toutes réelles et que deux sommets sont imaginaires conjugués et un réel, si l'équation $F(\lambda) = 0$ a des racines imaginaires.

(B)—— Le cas B où il existe une racine double n'annulant pas les mineurs n'offre aucune difficulté. Le couple correspondant à la racine simple est toujours

réel car la tangente commune aux coniques au point O, qui est l'une des droites de ce couple est toujours réelle. En revanche, les deux droites du couple double peuvent être imaginaires conjuguées. Dans ce cas les deux coniques f, g tangentes au point réel O se coupent en deux points P Q imaginaires conjugués.

(2°) Si la racine double annule les mineurs, les coniques f, g sont tangentes aux deux points où elles sont coupées par une certaine droite toujours réelle Δ. Mais ces points peuvent être soit réels, soit imaginaires conjugués. Dans le premier cas, le couple de droites qui correspond à la racine simple, lequel est formé précisément des tangentes communes, est réel. Dans le second il est constitué par deux droites imaginaires conjuguées.

Dans les cas D, E, G il n'y a pas de place pour des éléments imaginaires quand les coefficients de f, g sont réels.

Dans le cas F au contraire, on pourra, suivant la valeur de λ avoir des couples de droites réelles ou imaginaires.

Résumé de la Discussion.

Racines distinctes.	Trois racines réelles : Triangle conjugué commun réel.	Trois couples de sécantes réelles.	Quatre points d'intersection réels
		Deux couples de sécantes imaginaires, un de réelles.	Quatre points imaginaires
	Deux imaginaires, une réelle. Triangle à 2 sommets imaginaires.	Deux couples de sécantes imaginaires non conjugués, une de réelles.	Deux points réels - Deux imaginaires conjugués
Racine double	N'annulant pas tous les mineurs, couple simple de sécantes réelles.	Couple double de sécantes réelles	Contact en un point. Intersection en 2 points réels
		couple double de séc. imaginaires conjuguées	Cont.t en un point. Intersection en 2 points imaginaires réels
	Annulant tous les mineurs[1]	couple simple de sécantes réelles	Contact en deux points réels.
		couple simple de séc. imaginaires conjuguées	Contact en deux points imaginaires conjugués
Racine triple	Les mineurs pas tous nuls	Couple unique à droites distinctes	Osculation en un point. Intersection simp. en un autre
	Les mineurs tous nuls	Couple unique à droite droite double.	superosculation en un point.

[1] On peut observer que dans ce cas les coniques du faisceau ont en commun une infinité de triangles conjugués communs dont un sommet et un côté sont fixes et les deux autres sommets mobiles sur ce côté fixe.

Remarque I.

Il est facile de former l'équation générale des coniques dont l'intersection offre une singularité donnée.

Soit $f(x, y, z) = 0$ une conique, x_0, y_0, z_0 un de ses points, $P = 0$ une droite quelconque, l'équation

$$f(x, y, z) + P\left(\frac{\partial f}{\partial x_0} x + \frac{\partial f}{\partial y_0} y + \frac{\partial f}{\partial z_0} z\right) = 0$$

convient à toute conique qui touche $f = 0$ au point $x_0\, y_0\, z_0$.

Soit toujours $P = 0$ une droite arbitraire

$$f + P^2 = 0$$

convient à toute conique bitangente à $f = 0$.

Si dans l'équation

$$f(x, y, z) + P\left(\frac{\partial f}{\partial x_0} x + \frac{\partial f}{\partial y_0} y + \frac{\partial f}{\partial z_0} z\right) = 0$$

on suppose que la droite P passe au point x_0, y_0, z_0, on a là une représentation générale des coniques osculatrices en x_0, y_0, z_0 à la proposée.

Enfin, si P est proportionnel à

$$\frac{\partial f}{\partial x_0} x + \frac{\partial f}{\partial z_0} y + \frac{\partial f}{\partial z_0} z,$$

on obtient

$$f(x, y, z) + \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial x_0} x + \frac{\partial f}{\partial y_0} y + \frac{\partial f}{\partial z_0} z\right)^2 = 0,$$

qui convient à toute conique surosculatrice en x_0, y_0, z_0 à la conique $f = 0$.

Remarque II — Si l'une des coniques, g, par exemple, bien qu'à coefficients réels n'a pas de point réel, les quatre points de rencontre sont forcément imaginaires. Les racines de l'équation en λ sont donc forcément réelles.

Ainsi, par exemple, prenons

$$g = x^2 + y^2 + z^2,$$

l'équation $F(\lambda)$ devient

$$\begin{vmatrix} A + \lambda & B'' & B' \\ B'' & A' + \lambda & B \\ B' & B & A'' + \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Mais L et M sont symétriques par rapport à x et x', y et y', z et z', d'après une propriété bien connue des formes quadratiques. On a donc

$$L + \lambda' M = 0,$$

d'où en rapprochant de $L + \lambda M = 0$ et observant que λ' est différent de λ, par hypothèse,

$$L = 0, \quad M = 0.$$

Théorème III — Si λ est une racine double de $F(\lambda) = 0$ n'annulant pas à la fois tous les mineurs $\alpha, \alpha', \alpha'', \beta, \beta', \beta''$, la conique $f + \lambda g$ se compose de deux droites distinctes qui se coupent en un point commun aux coniques du faisceau.

On tire en effet des équations (2) en négligeant la première de ces équations

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta''} = \frac{z}{\beta'},$$

puis en négligeant la seconde

$$\frac{x}{\beta''} = \frac{y}{\alpha'} = \frac{z}{\beta}$$

et en négligeant enfin la troisième

$$\frac{x}{\beta'} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\alpha''}.$$

En rapprochant ces équations on trouve

$$\frac{x^2}{\alpha} = \frac{y^2}{\alpha'} = \frac{z^2}{\alpha''} = \frac{yz}{\beta} = \frac{zx}{\beta'} = \frac{xy}{\beta''}$$

et l'on peut ajouter

$$= \frac{g(x, y, z)}{\alpha A_1 + \alpha' A'_1 + \alpha'' A''_1 + 2\beta B_1 + 2\beta' B'_1 + 2\beta'' \beta''_1}$$

ou d'après la formule (1).

$$= \frac{g(x, y, z)}{F'(\lambda)}$$

Si donc $F'(\lambda) = 0$ sans que $\alpha, \alpha', \alpha'' \beta, \beta', \beta''$ soient tous nuls, on a forcément $g(x, y, z) = 0$. D'ailleurs, des équations (2) multipliées par x, y, z et ajoutées on tire

$$f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z) = 0,$$

donc puisque $g=0$, on a aussi $f=0$.

Réciproquement, si les deux droites d'un couple sont distinctes et se coupent en un point o de l'intersection commune des coniques du faisceau, le couple correspond à une racine multiple de l'équation $F(\lambda)=0$, qui n'annule pas tous les mineurs.

Ce dernier point est évident puisque les deux droites du couple sont distinctes. Il reste à prouver que $F'(\lambda)=0$. Or en effet nous avons:

$$\frac{x^2}{\alpha}=\frac{y^2}{\alpha'}=\frac{z^2}{\alpha''}=\frac{yz}{\beta}=\frac{zx}{\beta'}=\frac{xy}{\beta''}=\frac{g(x,y,z)}{F(\lambda)}$$

Comme la valeur commune des rapports ne saurait être zéro, et que, par hypothèse $g(x,y,z)=0$, on a donc $F'(\lambda)=0$.

Nous avons maintenant toutes les données nécessaires à la discussion.

A)_ Si les trois racines de $F(\lambda)=0$ sont distinctes, il y a dans le faisceau trois couples de droites distincts et dans aucun de ces couples les deux droites qui le forment ne sont confondues.

En effet, d'abord il y a trois couples distincts puisqu'il y a trois racines distinctes et que chacune fournit un couple différent. En second lieu chacun de ces couples comporte deux droites distinctes. Sans cela tous les $\alpha, \alpha', \alpha'', \beta, \beta', \beta''$ seraient nuls, et, d'après la relation (1), λ serait une racine double.

L'intersection se compose alors de quatre points distincts. Soient en effet Δ, Δ_0 et Δ', Δ'_0 deux des trois couples du faisceau. Il est impossible que Δ', par exemple passe par l'intersection de Δ et de Δ_0, car ce point o appartenant aux deux coniques singulières (Δ, Δ_0) et $(\Delta' \Delta'_0)$ appartiendrait à l'intersection. Le point double o du couple Δ, Δ_0 étant un point de l'intersection ce couple devrait correspondre à une racine multiple de l'équation $F(\lambda)=0$ ce qui est contre l'hypothèse. Enfin nous devons exclure l'hypothèse où une droite du couple (Δ, Δ_0) coïnciderait avec une droite du couple

(Δ', Δ'_0) ; dans ce cas en effet la droite Δ', supposée coïncidente avec Δ, passerait au point de rencontre de Δ et de Δ_0.

Nous voyons donc que dans le cas de trois racines simples les deux droites du couple (Δ, Δ_0) seront coupées par les deux droites du couple (Δ', Δ'_0) en quatre points distincts, et ces points seront évidemment les points communs à $f=0, g=0$.

Ajoutons que les points doubles forment un triangle dont les sommets O, O', O'' sont conjugués deux à deux par rapport à toutes les coniques du faisceau (Théorème II). Ce triangle O, O', O'' est donc conjugué à la fois par rapport à toutes les coniques du faisceau.

B)- Supposons maintenant une racine double n'annulant pas tous les mineurs $\alpha, \alpha', \alpha'', \beta, \beta', \beta''$. Soit λ la racine double, λ' la racine simple. A λ correspondra un couple de droites distinctes Δ, Δ_0 se coupant en un point O de l'intersection ; d'autre part, à λ' correspondra un couple de droites distinctes, car les $\alpha \ldots \beta''$ ne sont pas tous nuls sans quoi $F'(\lambda')$ devrait être nul d'après la formule (1) ; soit O' le point de rencontre des droites de ce second couple que je désignerai par Δ', Δ'_0.

Une de ces droites, par exemple Δ', doit joindre O' au point O. Maintenant nous devons observer que 1°- O est sur les coniques du faisceau, et par suite, la polaire commune du point O (Théorème I) dans toutes ces coniques se réduit à la tangente en O, qui est ainsi la même pour toutes ces coniques, en sorte que toutes les coniques du faisceau ont même tangente au point O. 2°- J'ajoute que OO' est cette tangente. En effet, O et O' sont conjugués par rapport à toutes les coniques du faisceau (Théorème II). Donc O' est sur la polaire du point O, c'est-à-dire sur la tangente commune.

Il est dès lors bien facile de se rendre compte de la disposition des deux couples (Δ, Δ_0) (Δ', Δ'_0) et des points d'intersection. Nous voyons en effet que des deux droites Δ', Δ'_0, une, Δ', passe au point O de rencontre de Δ et Δ_0, tandis que l'autre droite Δ'_0 du même

couple va couper Δ et Δ_0 en deux points distincts. Les coniques du faisceau ont donc en commun ces deux points et se touchent en outre au point O.

Le triangle conjugué commun cesse ici d'exister.

Cf. Maintenons le cas d'une racine double λ, mais supposons de plus que cette racine annule tous les mineurs $\alpha, \alpha', \alpha''$ β, β', β''. Alors $f + \lambda g$ est un carré parfait; dans ce cas le couple se réduit à une droite unique Δ (droite double).

Soit λ' la racine simple et (Δ', Δ'_0) le couple de droites distinctes correspondant. Ces droites se coupent en un point O' et d'après le théorème II, tout point de Δ étant un point double est conjugué de O' par rapport à toutes les coniques du faisceau. La droite Δ, est donc la polaire du point O' dans toutes ces coniques.

Cette droite Δ coupe les coniques du faisceau en deux points distincts, sans quoi, étant tangente, son pôle O' appartiendrait à l'intersection, et λ' serait racine double. D'ailleurs ces deux points d'intersection P, Q sont les mêmes pour toutes les coniques du faisceau qui de plus ne se couperont pas ailleurs qu'en ces deux points puisque la droite Δ contient tous les points d'intersection. Cela étant il est clair que si l'on mène $O'P$ $O'Q$ on aura précisement les droites Δ', Δ'_0 du couple qui correspond à λ', et ces droites se trouveront ainsi, par construction, tangentes en P et Q à toutes les coniques. Celles-ci seront donc toutes tangentes en ces deux points P, Q et comme on l'a vu ne se couperont nulle autre part.

D/. Supposons maintenant que l'on ait une racine triple n'annulant pas les mineurs $\alpha, \alpha', \alpha'', \beta, \beta', \beta''$. Reprenons le cas d'une racine double n'annulant pas les mineurs. Nous avions deux coniques tangentes en un point O et se coupant en deux points P, Q; le couple des droites OP, OQ est celui qui correspondait à la racine double, celui qui correspondait à la racine simple était formé de la tangente OO' au point O aux

coniques, et de la droite PQ. Si la racine simple tend à se rapprocher de la racine double, les deux couples (OP, OQ) et (OO', PQ) tendent à se confondre; il faudra donc que OP ou OQ, par exemple OP, vienne se confondre avec la tangente OT au point O. C'est dire que des deux points P, Q, il y en a un P qui doit venir se confondre avec le point O où les coniques avaient déjà un contact du premier ordre. On dit dans ce cas que les coniques ont un contact du second ordre au point O. Elles se coupent en outre en un point Q et le couple unique du faisceau se compose alors de la droite OQ et de la tangente OT au point O.

E. — Enfin il se pourrait que la racine triple annulât les mineurs. Dans ce cas il faudra que la droite OQ elle-même vienne coïncider avec la tangente OT. Le point Q viendra donc coïncider à son tour avec le point O. Les coniques auront ainsi un contact du troisième ordre au point O.

Il reste enfin un dernier cas, qui est celui où l'équation $F(\lambda) = 0$ aurait lieu identiquement. Toutes les coniques du faisceau

$$f + \lambda g = 0$$

seraient dans ce cas des couples de droites. Les coniques f et g, en particulier seront des couples de droites. Les équations (2) seront compatibles pour toutes les valeurs de λ, mais les mineurs $\alpha, \alpha', \alpha''$, β, β', β'' ne sauraient être tous nuls identiquement, quelque soit λ.

En effet, si cela avait lieu, f et g seraient en particulier des carrés parfaits

$$f = P^2, \quad g = Q^2,$$

et, comme on exclue l'hypothèse où f et g seraient proportionnels il est impossible que P et Q soient proportionnels. Si l'on forme alors

$$f + \lambda g = P^2 + \lambda Q^2$$

on a une forme quadratique réductible sans doute à deux carrés, mais qui ne saurait être un carré parfait tant que λ ou $\frac{1}{\lambda}$ sont différents

de zéro. Cela étant, les mineurs $\alpha, \alpha', \alpha'', \beta, \beta', \beta''$ ne peuvent être nuls tous à la fois pour toute valeur de λ.

Nous pouvons dès lors écrire les équations (2) sous la forme

$$\frac{x^2}{\alpha} = \frac{y^2}{\alpha'} = \frac{z^2}{\alpha''} = \frac{yz}{\beta} = \frac{zx}{\beta'} = \frac{xy}{\beta''} = \frac{g(x,y,z)}{F'(\lambda)},$$

Mais puisque $F(\lambda)$ est nul identiquement on a aussi $F'(\lambda)=0$ d'où, puisque les mineurs ne sont pas tous nuls, $g(x,y,z)=0$, et, par suite aussi $f(x,y,z)=0$, car des équations (2) on tire

$$f(x,y,z) + \lambda\, g(x,y,z) = 0.$$

Il est ainsi prouvé que si $F(\lambda)$ est nul identiquement, toute conique

$$f + \lambda\, g = 0$$

a un point double unique (sauf valeurs particulières de λ) et de plus ce point double fait partie de l'ensemble des points communs aux coniques du faisceau. Il y a deux cas à distinguer selon que ce point double est fixe ou mobile.

F/ – Supposons le fixe d'abord. Le faisceau se composera alors de couples de droites issues de ce point fixe.

Si l'on a par exemple

$$g = P^2 + Q^2$$

on aura

$$f = l P^2 + 2m PQ + n Q^2$$

et

$$f + \lambda g = (l+\lambda) P^2 + 2m PQ + (n+\lambda) Q^2$$

G/ – Supposons, au contraire, mobile le point double des coniques du faisceau. Soient (Δ, Δ_0) (Δ', Δ'_0) deux couples de droites contenus dans le faisceau

$$f + \lambda g = 0;$$

on peut supposer que le premier soit justement f et le second g; soient O et O' les points doubles de ces couples. Le point O' doit être forcément sur l'une des droites Δ, Δ_0 car, nous le savons, tous les

points doubles sont des points communs aux coniques du faisceau. Supposons donc que O' soit sur Δ; la droite Δ sera donc OO'. De même O est sur l'une des droites Δ', Δ'_0, par exemple sur Δ'. donc Δ' est la droite $O'O$. Ainsi Δ et Δ' coïncident, et l'on a

$$f = \Delta \cdot \Delta_0$$
$$g = \Delta \cdot \Delta'_0$$

d'où

$$f + \lambda g = \Delta (\Delta_0 + \lambda \Delta'_0).$$

En resumé les coniques du faisceau sont constituées chacune par une droite fixe Δ adjointe à une droite d'un faisceau de droites

$$\Delta_0 + \lambda \Delta'_0 = 0$$

Telle est la discussion générale des circonstances que peut présenter l'équation en λ. L'idée de s'appuyer dans cette discussion sur les propriétés des points doubles a été introduite il y a longtemps par Mr Darboux dans l'enseignement. Mais il nous a semblé qu'il y avait tout avantage à introduire plus complètement qu'on ne le fait d'habitude la considération des sommets du triangle conjugué commun.

Nous avons déjà observé que dans le cas A il y avait un véritable triangle conjugué commun. Dans le cas B ce triangle disparait Dans le cas C, où l'on associe à tout point M de Δ son conjugué harmonique N par rapport au segment PQ, le triangle $O'MN$ est conjugué à la fois dans toutes les coniques du faisceau. Il y a donc dans ce cas une infinité de triangles conjugués communs. Dans le cas D, le triangle n'existe plus, ses trois sommets sont réunis au point O. Par contre, dans le cas E, tous les points de la tangente commune Δ au point O sont des points doubles Chacun a donc (Théorème I) même polaire par rapport à toutes les coniques du faisceau. Mais il n'y a pas davantage de triangle conjugué commun.

La question de réalité a été réservée à dessein.

Tout ce que nous venons de dire s'applique en effet au cas de coefficients imaginaires. Si les coefficients de f, g sont supposés réels il y a lieu alors de se rendre compte des conditions de réalité des points de rencontre.

Discussion relative à la réalité.

A. — Dans le cas A où les trois racines sont inégales, les racines peuvent être réelles toutes les trois, ou bien une réelle et deux imaginaires conjuguées.

1°. - Si les trois racines de $F(\lambda)$ sont réelles et inégales, les coniques f et g se coupent en quatre points réels ou en quatre points imaginaires conjugués par deux.

En effet. Soient λ, λ' deux racines réelles de $F(\lambda)=0$, $(\Delta,\Delta_0)(\Delta',\Delta'_0)$ les deux couples de droites distinctes correspondants, en sorte que

$$f + \lambda g = \Delta . \Delta_0$$
$$f + \lambda' g = \Delta' . \Delta'_0 .$$

Les coefficients de $f + \lambda g$ et de $f + \lambda' g$ étant réels les droites Δ et Δ_0 sont réelles ou imaginaires conjuguées, de même pour Δ' et Δ'_0.

Si $\Delta, \Delta_0, \Delta', \Delta'_0$ sont réelles, les quatre points $\Delta\Delta'$ (intersection de Δ et de Δ') $\Delta\Delta'_0$, $\Delta_0\Delta'$, $\Delta_0\Delta'_0$ sont réels, les quatre points d'intersection sont réels.

Si Δ, Δ_0 sont réelles et Δ', Δ'_0 imaginaires conjugées, ces deux dernières droites coupent Δ en deux points $\Delta\Delta'$, $\Delta\Delta'_0$ qui sont imaginaires conjugués, et coupent Δ_0 aussi en deux points $\Delta_0\Delta'$, $\Delta_0\Delta'_0$ imaginaires conjugués.

Resterait enfin l'hypothèse où Δ et Δ_0 seraient imaginaires conjuguées ainsi que Δ' et Δ'_0. Mais alors Δ et Δ' se couperont en un point imaginaire $\Delta\Delta'$ qui admettra comme conjugué le point $\Delta_0\Delta'_0$ intersection des droites Δ_0, Δ'_0 imaginaires conjuguées

de Δ, Δ'. Parcillement, les deux points $\Delta\Delta'_0$ et $\Delta_0\Delta'$ seront imaginaires conjugués.

Cette hypothèse revient d'ailleurs à la précédente, car soit λ'' la troisième racine à laquelle correspond le couple Δ'', Δ''_0. Ces deux droites sont réelles. En effet Δ'' doit contenir deux des quatres points d'intersection et Δ''_0 les deux autres. Il faut donc pour que ce couple soit distinct des précédents qu'il soit formé des droites de jonction des points $\Delta\Delta'$ et $\Delta_0\Delta'_0$, $\Delta_0\Delta'$ et $\Delta\Delta'_0$. Ces deux couples de points étant composés de points imaginaires conjugués les droites Δ'', Δ''_0 qui portent chacune l'un d'eux sont réelles.(1)

2°_ Admettons maintenant l'existence d'une racine réelle λ et de deux racines imaginaires conjuguées λ', λ''.

Je dis que dans ce cas deux des quatre points de rencontre sont reels et deux imaginaires. Soit en effet $\lambda' = p + iq$. Il est impossible que λ' fournisse un couple de sécantes réel (je veux dire à coefficients réels). Il faudrait en effet que $f + (p+iq)g$ fut proportionnel à une expression telle que $M^2 \pm N^2$ où M, N sont deux fonctions linéaires réelles. Ecrivons donc

$$f + (p+iq)\,g = (r+is)(M^2 \pm N^2)\ ;$$

on aurait aussi, en changeant i en $-i$,

$$f + (p-iq)\,g = (r-is)(M^2 \pm N^2)$$

d'où

$$f + p\,g = r\,(M^2 \pm N^2)$$
$$q\cdot g = s\,(M^2 \pm N^2).$$

On n'a pas $s = 0$ car g serait nul identiquement. On a donc

$$f + p\,g = \frac{qr}{s}\,g$$

---

(1) L'existence d'un couple de sécantes réelles n'est pas évidente à priori. C'est un bon exercice de prouver analytiquement que des trois racines de $F(\lambda)$ il y en a toujours une qui donne pour $f + \lambda g$ une différence de carrés

ou

$$f = \left(-p + \frac{q^2}{3}\right) g;$$

Si $-p + \frac{q^2}{3}$ est nul f est identiquement nul, et dans le cas contraire, f est proportionnel à g, tous cas à exclure.

Il suit de là qui si l'on écrit

$$f + (p + iq) g = P \cdot Q,$$

les droites P, Q sont imaginaires non conjuguées,

Soient P_0, Q_0 les fonctions conjuguées de P, Q, on aura

$$f + (p - iq) g = P_0 Q_0.$$

Ainsi on aura

$$f + \lambda' g = P Q. \quad f + \lambda'' g = P_0 Q_0.$$

Les points de rencontre de f et de g sont les quatre points $P P_0, Q Q_0$, $P Q_0, Q P_0$. Le point $P P_0$ intersection de deux droites conjuguées est réel; de même $Q Q_0$. Les points $P Q_0$ et $Q P_0$ sont imaginaires conjugués.

Considérons alors le couple de droites Δ, Δ_0 correspondant à la racine réelle λ. Le couple doit être distinct des deux autres, et la droite Δ doit joindre deux des quatre points $P P_0, Q Q_0, P Q_0, Q P_0$ la droite Δ_0 les deux autres. Donc Δ doit joindre par exemple les deux premiers points réels $P P_0, Q Q_0$, et Δ_0 les deux autres qui sont imaginaires conjuguées. Donc enfin Δ et Δ_0 sont réelles

Il est ainsi prouvé 1° que deux des points de rencontre sont réels et les deux autres imaginaires conjugués. 2° que la racine réelle unique fournit toujours un couple de droites réelles.

Pour terminer ce qui concerne le cas des racines inégales observons:

1° Qu'il y a toujours un couple de sécantes réelles.

2° que les trois sommets du triangle conjugué commun sont réels, si les racines sont toutes réelles et que deux sommets sont imaginaires conjugués et un réel, si l'équation $F(\lambda) = 0$ a des racines imaginaires.

(B)—— Le cas B où il existe une racine double n'annulant pas les mineurs n'offre aucune difficulté. Le couple correspondant à la racine simple est toujours

les racines d'une telle équation sont donc toujours réelles.

Remarque III. On sait que pour résoudre une équation du quatrième degré on forme une transformée qui est seulement du troisième degré appelée résolvante. Dans le cas actuel, l'équation $F(\lambda) = 0$ est une résolvante de l'equation du quatrième degré que l'on obtiendrait en éliminant y, par exemple, entre $f = 0$ et $g = 0$. Inversement, étant donnée une équation du quatrième degré on peut la regarder comme provenant d'une telle élimination, et cela d'une infinité de manières. On arrive ainsi à un procédé très élégant pour former une résolvante du troisième degré de l'équation biquadratique. On pourra lire à ce sujet un mémoire publié par Mr Darboux en 1873 dans le journal de Liouville : Sur la résolution de l'équation du quatrième degré.

Sur l'Inversion et les Surfaces et les Courbes anallagmatiques.

Dupin découvrit en 1804, en même temps que les propriétés fondamentales des coniques focales, ces surfaces du quatrième ordre dont les deux familles de lignes de courbure sont circulaires. Parmi tant d'autres découvertes de l'illustre géomètre, celle-ci devait se manifester comme une des plus fécondes. Mais à ce commencement du siècle, la théorie des transformations n'avait pas encore été créée par Poncelet. Après l'homographie et la dualité, l'inversion figure au premier rang de ces transformations qui devaient jouer un rôle si élevé dans l'évolution moderne de la géométrie.

S'il faut en croire Chasles[1], Poncelet lui-même connut le principe de la transformation par rayons vecteurs réciproques ; sa portée ne fut cependant reconnue et ses conséquences développées que par

---

[1] Rapport sur les principes de la géométrie p. 41, 141 et suivantes.

Bellavitis en 1836. Bellavitis trouva aussitôt des continuateurs dans Stubbs Thomson, W. Robert, Salmon, Hart, Hirst, etc.

Salmon et Hirst s'occupèrent les premiers des singularités des courbes transformées. Hirst eut l'idée de donner à l'inversion une origine projective, et entra ainsi dans la voie de ces transformations birationnelles dont la théorie générale a été créée par Cremona.

Les travaux relatifs à une transformation valent exclusivement par l'usage que l'on en fait. Les travaux de Mr G. Darboux marquent à cet égard une période féconde, qui a placé l'inversion au rang qu'elle occupe aujourd'hui. Ajoutons toutefois que les découvertes récentes de la haute analyse ont encore assigné à cette transformation un rôle nouveau, et qu'après les travaux de MM. Klein et Poincaré, elle est désormais associée aux découvertes les plus profondes du calcul intégral.

Mais c'est au point de vue géométrique, que je vais exclusivement m'attacher, et notamment à ces courbes et surfaces du quatrième ordre qui présentent dans leur théorie générale, d'une part une continuation de la théorie des coniques et des surfaces du second degré, et d'autre part une extension des idées évoquées par Dupin dans ses recherches mémorables. On pourra voir dans l'ouvrage de M^r. G. Darboux, sur une "Classe remarquable de courbes et de surfaces" des indications bibliographiques nombreuses qui rendent à chacun sa part légitime.

On y retrouvera entr'autres les noms de MM Casey, Cayley, Clebsch, Cremona, de la Gournerie, Kummer, et particulièrement de Moutard et Laguerre qui, concurremment avec M^r. Darboux, ont contribué à édifier la théorie des courbes et des surfaces anallagmatiques.

De l'Inversion.

Je n'ai pas besoin de rappeler la définition de l'inversion, non plus que ses propriétés les plus élémentaires. Je rappellerai seulement que

si O est le pôle d'inversion, p la puissance de transformation, la sphère Σ de rayon $\sqrt{p}$ et de centre O est le lieu des points qui coïncident avec leurs transformés. Cette sphère suffit à définir complètement l'inversion.

Pour avoir l'inverse d'un point M, on mènera le diamètre OM de la sphère Σ, lequel perce cette sphère en deux points P, Q et l'on prendra sur ce diamètre un point M' tel que

$$OM \cdot OM' = p = \overline{OP}^2 = \overline{OQ}^2.$$

C'est dire que M' et M diviseront harmoniquement le diamètre PQ.

Cette légère modification dans la définition du point M', qui reste équivalente à celle que l'on donne au début de la théorie, conduit à la généralisation de l'inversion telle que Hirst l'a donnée.

Au lieu d'une sphère prenons une quadrique Σ quelconque, et prenons pour O un point fixe quelconque. Pour construire la transformée d'un point M, on mènera OM, qui coupera Σ en deux points PQ et l'on prendra M' conjugué harmonique de M par rapport au segment PQ.

Il suffit d'effectuer une homographie dans laquelle la trace de Σ sur le plan polaire de O devienne le cercle imaginaire de l'infini, pour retomber exactement sur l'inversion.

Par cette transformation, Σ devient en effet une sphère Σ' dont le centre O' est l'homologue du point O.

La transformation de Hirst comprend cependant deux transformations particulières différentes de l'inversion. Si en effet la quadrique Σ est un cône, ou un couple de plans, la réduction à l'inversion par homographie n'est plus possible, car Σ n'est plus la transformée homographique d'une sphère. Mais en revanche, si Σ est un cône, on peut, par une homographie réduire Σ à être un cône isotrope; et un couple de plans isotropes, si Σ est un couple de plans.

Dans les deux cas la transformation de Hirst prend une forme métrique différente de l'inversion, mais qui n'en est pas moins intéressante. Si dans la transformation de Hirst Σ est un cône isotrope de sommet A, le point M' transformé de M est assujetti à cette double condition

1° que M' et M soient alignés sur un point fixe O. 2° que le cône isotrope divise harmoniquement le segment M M'. C'est-à-dire que les droites A M, A M' sont conjuguées dans ce cône isotrope, ou rectangulaires.
On peut donc dire que le point M', transformé de M est défini par cette double condition 1° que M' et et M soient alignés sur le point fixe O; 2° que le segment M M' soit vu du point A sous un angle droit.

Dans le second cas de dégénérescence, où Σ est un couple de plans isotropes, on voit qu'il faut substituer à la deuxième condition ci-dessus celle-ci: que les plans menés par M, M' et par la droite d'intersection des deux plans soient rectangulaires.

Je ne m'occuperai pas ici de ces deux transformations

La Symétrie par rapport à un plan, comme cas particulier d'Inversion.

Supposons que la sphère directrice Σ d'une inversion s'agrandisse indéfiniment jusqu'à se réduire à un plan Π. Que devient l'inversion? Pour le voir appliquons la construction; soit M le point à transformer, le diamètre de la sphère issu de M devient la perpendiculaire abaissée de M sur le plan Π; des deux extrémités P, Q de ce diamètre, l'une P est le pied de cette perpendiculaire et l'autre Q est à l'infini. Maintenant, comme le point M' transformé de M, est le conjugué harmonique de M par rapport au segment P Q, il faudra ici, puisque Q est à l'infini, que P soit le milieu de M M'; en un mot, M' est le symétrique de M par rapport au plan Π.

Théorème. — Si deux figures F, F' sont symétriques par rapport à un plan Π, une inversion I quelconque les change en deux figures Φ, Φ' qui sont inverses l'une de l'autre par rapport à la sphère Σ transformée du plan Π dans l'inversion I.

En effet, soient M, M' un point de F et son symétrique, qui fait partie de F'.

Toute sphère menée par M et M' a son centre dans le plan, Π, elle est donc orthogonale à ce plan. Appelons μ, μ' les inverses des points M et M' dans l'inversion I. Les sphères menées par M et M' ont pour inverses les sphères menées par μ et μ'; Les premières étant orthogonales au plan Π, celles-ci seront orthogonales à la sphère Σ, inverse du plan Π. Cela exige que le centre O de la sphère Σ soit sur l'axe radical $\mu\mu'$ de toutes ces sphères et que de plus, R désignant le rayon de Σ, on ait

$$O\mu \cdot O\mu' = R^2,$$

ce qui démontre le théorème.

On prouvera de la même façon ce théorème un peu plus général : Si deux figures F, F' sont inverses par rapport à une sphère S, et qu'on les transforme simultanément par une autre inversion en deux figures Φ Φ', ces figures Φ et Φ' sont inverses par rapport à la sphère Σ transformée de S.

Si l'on a pris, en particulier le pôle de l'inversion sur la sphère S, la sphère Σ se réduit à un plan Π et les figures Φ Φ' sont symétriques par rapport à ce plan. Ainsi, par toute inversion, deux figures inverses ou symétriques conservent leur relation, et à cet égard, la symétrie n'est pas une transformation distincte de l'inversion.

De même que l'on étudie les figures qui possèdent plusieurs plans de symétrie, on peut rechercher celles qui possèdent plusieurs sphères par rapport auxquelles elles sont inverses. Cette seconde question comprend même la première, et elle offre plus de variété dans sa solution que la symétrie car si une figure possède trois sphères d'inversion on peut toujours il est vrai (aux imaginaires près) réduire ces sphères à trois plans au moyen d'une inversion qui aurait comme pôle un des points commun aux sphères d'inversion et on tombe alors sur une figure douée de trois plans de symétrie. Mais si la figure primitive possède plus de trois sphères d'inversion on ne pourra pas toujours les réduire toutes à des plans, en sorte qu'avec des plans de symétrie la figure possédera toujours des sphères d'inversion.

Ce n'est pas mon intention de faire ici une théorie générale des figures douées de sphères d'inversion, parallèle à la théorie analogue des plans

de symétrie ; je vais exclusivement m'occuper des courbes et des surfaces appelées anallagmatiques par Mr Moutard, et qui possèdent cette propriété d'admettre une ou plusieurs sphères d'inversion.

Sur les systèmes de Sphères dans l'espace.

Je rappellerai auparavant et en quelques mots quelques faits essentiels concernant les systèmes de sphères dans l'espace.

Soit l'équation d'une sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z + 2\delta = 0,$$

les quantités $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont ce que l'on peut appeler les coordonnées d'une sphère dans l'espace. La notion de ces coordonnées a été singulièrement perfectionnée par Mr Lie et principalement par Mr Darboux, mais cette notion élémentaire nous suffira ici. Une équation entre $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ assujettit la sphère à une condition.

L'exemple le plus simple est fourni par l'équation du premier degré

$$A\alpha + B\beta + C\gamma + D\delta + E = 0.$$

On démontre aisément que cette équation équivaut à dire que la sphère $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ est orthogonale à une sphère fixe.

En effet, prenons une sphère $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0$; la condition d'orthogonalité de cette sphère avec la sphère $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, s'écrit :

$$\alpha_0\alpha + \beta_0\beta + \gamma_0\gamma - \delta - \delta_0 = 0.$$

Si donc D n'est pas nul on peut identifier cette équation avec l'équation linéaire précédente en posant

$$\alpha_0 = -\frac{A}{D}, \quad \beta_0 = -\frac{B}{D}, \quad \gamma = -\frac{C}{D}; \quad \delta_0 = \frac{E}{D}.$$

Si $D = 0$ on a seulement

$$A\alpha + B\beta + C\gamma + E = 0,$$

équation qui exprime que la sphère $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ a son centre dans un plan, et se trouve par suite orthogonale à ce plan. Ainsi, lorsque $D = 0$, la

La surface D a reçu le nom de surface déférente et la sphère Σ est la sphère directrice.

On voit cependant que ce mode de génération n'a plus de sens si la sphère Σ se réduit à un plan. Ce plan est alors le lieu du centre. La condition d'orthogonalité a la forme

$$A\alpha + B\beta + C\gamma + E = 0,$$

et l'équation $F(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = 0$ ne peut être débarrassée de δ. La notion de système offre au contraire l'avantage de s'appliquer à tous les cas; on en aura bientôt des exemples.

Démontrons tout d'abord la réciproque suivante des propositions qui viennent d'être établies.

Les sphères à deux paramètres qui restent orthogonales à une sphère fixe Σ enveloppent une surface anallagmatique

Supposons pour fixer les idées que Σ soit une véritable sphère. Prenons une sphère Ω et deux sphères voisines Ω', Ω''. Ces trois sphères se coupent en deux points M, M' et comme O, centre de Σ, a la même puissance p dans ces trois sphères, il faut que O soit sur l'axe radical MM'; de plus on a

$$OM \cdot OM' = p.$$

Mais M et M' sont les deux points où la sphère Ω touche son enveloppe A; on voit ainsi, par la relation ci-dessus, que les deux nappes de cette enveloppe sont inverses l'une de l'autre par rapport à la sphère Σ.

La proposition est donc établie. Mais on observera de plus que si I est le centre de la sphère Ω, I', I'' les centres des sphères voisines Ω', Ω'' les déplacements II', II'' ont lieu dans le plan tangent en I à la surface déférente, lieu de ce centre I. Appelons Π ce plan tangent. Ce plan Π étant le plan des centres des trois sphères Ω, Ω', Ω'' est normal à la corde commune MM' en son milieu P. Ainsi, le plan mené par le milieu P de MM' normalement à cette droite MM' est tangent au point I à la surface déférente.

Cette remarque va nous permettre de donner à l'équation de la surface

anallagmatique une forme très remarquable.

Soient $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0)$ les coordonnées de la sphère Σ, laquelle aura dès lors pour équation

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha_0 x - 2\beta_0 y - 2\gamma_0 z + 2\delta_0 = 0;$$

soient x, y, z les coordonnées du point M; x', y', z' celles du point M'. Faisons pour abréger

$$p = R_0^2 = \alpha_0^2 + \beta_0^2 + \gamma_0^2 - 2\delta_0;$$

on voit que R_0 est le rayon de la sphère Σ, et p la puissance d'inversion. Puisque les points (x, y, z) (x', y', z') $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ sont en ligne droite nous avons

$$\frac{x'-\alpha_0}{x-\alpha_0} = \frac{y'-\beta_0}{y-\beta_0} = \frac{z'-\gamma_0}{z-\gamma_0} = \frac{\sqrt{(x'-\alpha_0)^2+(y'-\beta_0)^2+(z'-\gamma_0)^2}}{\sqrt{(x-\alpha_0)^2+(y-\beta_0)^2+(z-\gamma_0)^2}}$$

$$= \frac{p}{(x-\alpha_0)^2+(y-\beta_0)^2+(z-\gamma_0)^2}$$

en observant que $OM \cdot OM' = p$.

Ceci posé, le plan mené par le point $P\left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}, \frac{z+z'}{2}\right)$ normalement à MM' aura pour équation

$$(x-\alpha_0)\left(X - \frac{x+x'}{2}\right) + (y-\beta_0)\left(Y - \frac{y+y'}{2}\right) + (z-\gamma_0)\left(Z - \frac{z+z'}{2}\right) = 0$$

ou encore

$$(x-\alpha_0)X + (y-\beta_0)Y + (z-\gamma_0)Z$$
$$- \frac{1}{2}\left\{(x+x')(x-\alpha_0) + (y+y')(y-\beta_0) + (z+z')(z-\gamma_0)\right\} = 0$$

Le terme indépendant se calcule sans peine; on a

$$\begin{aligned}
&(x+x')(x-\alpha_0) + (y+y')(y-\beta_0) + (z+z')(z-\gamma_0) \\
&= [(x+\alpha_0) + (x'-\alpha_0)](x-\alpha_0) + [(y+\beta_0)+(y'-\beta_0)](y-\beta_0) + \cdots\cdots \\
&= x^2 + y^2 + z^2 - \alpha_0^2 - \beta_0^2 - \gamma_0^2 + (x'-\alpha_0)(x-\alpha_0) \\
&\qquad + (y'-\beta_0)(y-\beta_0) + (z'-\gamma_0)(z-\gamma_0).
\end{aligned}$$

Or les formules ci-dessus nous donnent

$$x' - \alpha_0 = \frac{p\,(x-\alpha_0)}{(x-\alpha_0)^2 + (y-\beta_0)^2 + (z-\gamma_0)^2}$$

d'où

$$(x'-\alpha_0)(x-\alpha_0) = \frac{p\,(x-\alpha_0)^2}{(x-\alpha_0)^2 + (y-\beta_0)^2 + (z-\gamma_0)^2}$$

et par suite,

$$(x'-\alpha_0)(x-\alpha_0) + (y'-\beta_0)(y-\beta_0) + (z'-\gamma_0)(z-\gamma_0) = p$$

le terme indépendant du plan normal en P s'écrit donc

$$-\frac{1}{2}\left\{ x^2 + y^2 + z^2 - \alpha_0^2 - \beta_0^2 - \gamma_0^2 + p \right\}$$

ou encore,

$$-\frac{1}{2}\left\{ x^2 + y^2 + z^2 - 2\delta_0 \right),$$

en sorte que l'équation de ce plan est finalement

$$(x-\alpha_0)\,X + (y-\beta_0)\,Y + (z-\gamma_0)\,Z - \frac{1}{2}\,(x^2+y^2+z^2-2\delta_0) = 0$$

Supposons qu'on ait donné l'équation tangentielle de la surface déférente D,

$$\Phi(\xi, \eta, \zeta, \tau) = 0,$$

laquelle exprime que le plan $\xi x + \eta y + \zeta z + \tau t = 0$ touche cette surface. Puisque le plan ci-dessus doit être tangent en I à la surface, nous devons avoir

$$\Phi\left(x-\alpha_0,\ y-\beta_0,\ z-\gamma_0,\ \delta_0 - \frac{x^2+y^2+z^2}{2}\right) = 0$$

Telle sera l'équation que doivent vérifier les coordonnées (x, y, z) de tout point M de la surface anallagmatique.

Ainsi : l'équation tangentielle de la surface déférente étant donnée on peut écrire sans aucun calcul l'équation de la surface anallagmatique. (1)

Cette remarque offre l'avantage de s'étendre au cas où la sphère Ω ne dépend que d'un seul paramètre. Reprenons en effet ce cas que nous avons jusqu'ici laissé de coté. La sphère Ω devant ne contenir qu'un seul paramètre variable et rester orthogonale à la sphère Σ, son centre décrira une courbe qu'on appelle encore déférente.

---

(1) Nous engageons le lecteur à prouver directement que si l'on prend une sphère mobile

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z + 2\delta = 0$$

vérifiant les relations

$$\alpha_0\alpha + \beta_0\beta + \gamma_0\gamma - \delta_0 - \delta = 0 \qquad f(\alpha, \beta, \gamma) = 0$$

on obtient l'équation de son enveloppe en portant $x-\alpha_0$, $y-\beta_0$, $z-\gamma_0$, $\delta_0 - \frac{x^2+y^2+z^2}{2}$ à la place de ξ, η, ζ, τ dans l'équation tangentielle $\Phi(\xi, \eta, \zeta, \tau) = 0$ de la surface déférente.

Je vais prouver que toute sphère dont le centre décrit une courbe $\mathcal{L}$ qui reste orthogonale à une sphère fixe Σ enveloppe une surface anallagmatique.

Soient en effet Λ, Λ' deux positions voisines de la sphère; leur cercle commun Γ est le cercle de contact de Λ avec la surface enveloppe A. Mais puisque Λ, Λ' sont orthogonales à Σ, il en résulte qu'elles se transforment en elles-mêmes dans l'inversion qui admet Σ comme sphère directrice; donc leur cercle commun Γ se transforme aussi en lui-même, et par suite, la surface A lieu de ce cercle est aussi sa propre inverse.

Mais on doit remarquer en outre que le plan L de ce cercle Γ, plan radical de Λ, Λ', doit contenir le point O, et être de plus normal à la ligne des centres I, I' des sphères Λ, Λ'. Ici cette ligne des centres n'est autre que la tangente Δ au point I à la courbe déférente, lieu des centres des sphères Λ. Donc, pour obtenir le cercle de contact d'une sphère Λ avec son enveloppe, il suffira de mener par le centre O de la sphère Σ (pôle d'inversion) un plan perpendiculaire à la tangente à la déférente au centre I de la sphère Λ; ce plan coupe la sphère suivant le cercle de contact Γ.

Prenons un point M sur ce cercle; la droite OM le coupe en un second point M' et M, M' sont deux points inverses l'un de l'autre. Soit P le milieu de MM'. Le plan Π normal à la corde MM' au point P va passer évidemment par l'axe de ce cercle, en appelant axe d'un cercle la normale à son plan élevée en son centre. Mais ici, cet axe est justement la tangente Δ à la déférente. On reconnaît ainsi que le plan Π mené par le milieu du segment MM' perpendiculairement à ce segment touche la courbe déférente au centre I de la sphère enveloppée Λ.

Les mêmes calculs qui ont été faits précédemment prouvent que $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0$ étant les coordonnées de la sphère Σ, (x, y, z) les coordonnées du point M, l'équation du plan Π s'écrit

$$(x-\alpha_0)\,X + (y-\beta_0)\,Y + (z-\gamma_0)\,Z - \frac{1}{2}\,(x^2+y^2+z^2-2\delta_0) = 0.$$

Pour qu'un plan $\xi x + \eta y + \zeta z + \tau t = 0$ touche la courbe déférente, il faut qu'une certaine équation homogène soit vérifiée

$$\phi\,(\xi, \eta, \zeta, \tau) = 0;$$

c'est l'équation tangentielle de la courbe déférente. En exprimant alors que le plan Π touche cette courbe, nous aurons comme précédemment

$$\Phi\left(x-\alpha_0,\ y-\beta_0,\ z-\gamma_0,\ \delta_0-\frac{x^2+y^2+z^2}{2}\right)=0,$$

résultat qui justifie pleinement ce que nous avions annoncé.

Une équation homogène entre les coordonnées d'un plan

$$\Phi(\xi,\eta,\zeta,\tau)=0$$

exprime généralement que le plan touche une surface non développable. Il peut cependant arriver que cette équation exprime que le plan est tangent à une courbe. Nous avons déjà rencontré ce fait à propos de l'équation du second degré. Parallèlement à cette distinction se place celle qui sépare les surfaces anallagmatiques en deux classes, les unes à déférente superficielle, les autres à déférente curviligne.

Autre Définition des Surfaces anallagmatiques

Raisonnons dans le cas d'une déférente superficielle. Soit Σ une des sphères enveloppées, I son centre, Π le plan tangent en I à la déférente, et O M M' la perpendiculaire à ce plan tangent issue du centre O de la sphère directrice. Les points de contact de la sphère Σ avec l'anallagmatique enveloppe A sont les points M, M' où cette perpendiculaire rencontre Σ. Le plan Π coupe la sphère Σ suivant un cercle K dont O M M' est l'axe et dont le centre est le point P milieu de M M'. Les deux sphères de centres M et M' qui passent par ce cercle K ont donc même rayon. Je vais prouver que ce rayon est nul.

En effet, appelons λ ce rayon ; comme le plan Π du cercle K est à une distance O P du centre de la sphère Σ on a, p étant le carré du rayon de cette sphère et ρ le rayon du cercle K

$$p=\rho^2+\overline{OP}^2$$

on aura aussi

$$\lambda^2 = PM^2 + \rho^2$$

puisque le cercle K résulte de la section de la sphère de centre M, de rayon λ, par un plan mené à la distance MP de son centre. Il vient donc

$$p - \lambda^2 = OP^2 - PM^2 = (OP+PM)(OP-PM)$$
$$= OM \cdot OM' = p$$

donc $\lambda^2 = 0$.

Les points M M' sont donc les centres des deux sphères de rayon nul que l'on peut mener par le cercle K, trace de la sphère Σ sur le plan Π, tangent à la surface déferente.

Ainsi on a ce théorème :

Si l'on fait rouler un plan Π sur une surface D et que l'on prenne le cercle K trace du plan Π sur une sphère fixe Σ, le lieu des centres M, M' des sphères de rayon nul passant par le cercle K constitue les deux nappes de la surface anallagmatique qui admet D pour surface déférente, et Σ pour sphère directrice.

Supposons que la surface D ait la forme d'un canal très allongé, et finisse par perdre une de ses dimensions de manière à se réduire à une courbe. Nous nous trouverons dans le cas d'une surface anallagmatique à déférente courbe, et la propriété subsiste avec cette différence qu'il faudra prendre pour Π tous les plans tangents de la courbe. En particulier, les plans menés par une même tangente Δ de la courbe fourniront des points M, M' distribués sur le cercle de contact de la sphère Ω qui a son centre au point de contact de Δ avec la courbe déférente.

Des Courbes anallagmatiques.

Soit une courbe anallagmatique C se reproduisant dans l'inversion définie par la sphère Σ; si M M' sont deux points correspondants, on a

$$OM, OM' = p;$$

et M, M' sont alignés sur le point O.

Ce point c est ainsi le sommet d'un cône dont toutes les génératrices sont des cordes de la courbe.

Menons par M, M' une sphère Λ qui ait de plus, un contact du second ordre en M avec C, ce qui revient à faire passer cette sphère par deux points M_1, M_2 voisins de M. Cette sphère sera orthogonale à la sphère Σ, puisqu'elle contient un couple M, M' de points correspondants. Mais elle passe par les points M_1, M_2 voisins de M sur la courbe, donc, comme elle est à elle-même sa propre inverse, elle ira passer par M'_1, M'_2 inverses de M_1, M_2, et voisins de M' sur la courbe C. Cette sphère Λ présente ainsi en M et M' des contacts du second ordre avec la courbe C; comme elle ne dépend que d'un paramètre, elle enveloppe une anallagmatique à déférente curviligne.

Lorsqu'une surface dépend d'un paramètre et qu'elle enveloppe une surface, on sait que la courbe de contact de chaque surface avec la surface enveloppe possède elle-même une enveloppe sur cette dernière surface; cette enveloppe est une courbe à laquelle, par extension d'une locution usitée pour les surfaces développables, Mr G. Darboux a donné le nom d'arête de rebroussement. La surface enveloppée variable présente un contact du second ordre avec cette arête, aux points où la courbe de contact touche elle-même l'arête.

Dans le cas actuel, la courbe C sera donc une arête de la surface A enveloppée par la sphère Λ.

Cette remarque nous permet de donner une construction de la courbe C au moyen de la courbe déférente de la surface A. En effet, le couple de points M, M' déjà considéré sur C, résulte de l'intersection de trois sphères Λ consécutives. Le plan des centres de ces sphères est le plan osculateur à la déférente au centre I de la sphère Λ; la corde M, M' qui passe d'ailleurs au point O, est perpendiculaire à ce plan. On aura donc le couple M, M' en coupant la sphère Λ par une normale menée du point O au plan osculateur à la déférente au centre I de Λ.

Appelons Π' ce plan osculateur; il coupe la sphère Σ suivant un cercle K'. On voit, d'après une remarque déjà faite, que les points M, M' sont les centres des deux sphères de rayon nul menées par

ce cercle K'. De là une autre construction de la courbe C au moyen de la déférente.

On considère les plans osculateurs Π' d'une courbe D ; chacun coupe la sphère Σ suivant un cercle K' ; la courbe C lieu des centres M M' des sphères de rayon nul menées par ce cercle est une courbe anallagmatique, arête de rebroussement de la surface anallagmatique dont la courbe D est la déférente et Σ la sphère directrice.

Les Courbes Anallagmatiques sphériques.

Nos raisonnements précédents supposaient que la sphère Λ variait d'un couple M, M' de points correspondants à un autre : Cette sphère Λ peut cependant être fixe ; il faut et il suffit pour cela que la courbe considérée soit sphérique. Puisque d'autre part, toute anallagmatique admet pour cordes les génératrices d'un cône, il nous suffira de considérer les courbes d'intersections des sphères et des cônes. Il est bon de remarquer que toute courbe qui résulte de l'intersection d'une sphère et d'un cône est anallagmatique, et qu'elle se transforme en elle-même dans l'inversion qui a pour pôle le sommet du cône et pour puissance la puissance de ce sommet par rapport à la sphère. Remarquons que l'on suppose essentiellement que le sommet du cône n'est pas sur la sphère.

Maintenant que la sphère Λ est fixe, nous ne pouvons plus faire appel au lieu de son centre. Il faut observer toutefois que ce lieu n'intervenait que par ses plans osculateurs, c'est-à-dire, par la développable dont ce lieu était l'arête. Nous allons voir que dans le cas actuel, un cône joue le même rôle que cette développable, en sorte que l'on peut dire que cette dégénérescence de la développable susdite en un cône est caractéristique des anallagmatiques sphériques.

Soit A notre courbe, M, M' deux points correspondants alignés

sur le sommet O du cône H dont les génératrices sont des cordes de A. Soit I le centre de la sphère Λ qui contient la courbe A.

Le plan Π mené par le milieu P de M M' perpendiculairement à ce segment va passer au point I et il enveloppe évidemment autour de ce point un cône H', qui est supplémentaire du cône H. Soit K le cercle déterminé par le plan Π dans la sphère directrice Σ (celle de centre O et de rayon $\sqrt{p}$, où p est la puissance de O par rapport à la sphère Λ). Nous avons déjà vu que M, M' sont les centres des deux sphères de rayon nul menées par ce cercle. La courbe A peut donc se définir comme le lieu des centres M, M' des sphères de rayon nul qui passent par les cercles K déterminés dans une sphère fixe Σ par les plans tangents d'un cône H'.

La définition est donc identique à celle que nous avons déjà rencontré pour les courbes anallagmatiques, seulement, la développable est ici devenue un cône. Ce cône H' a son sommet au centre de la sphère Λ, il est supplémentaire du cône H qui contient la courbe, et il a lui, son sommet au centre de la sphère directrice Σ.

La développable qui a pour arête la courbe déférente se réduisant à un cône, la courbe déférente disparaît. Mais nous allons voir que dans ce cas spécial des anallagmatiques sphériques on donne le nom de déférente à une autre courbe tracée sur la sphère Λ et qui intervient dans la définition de la courbe A sur la sphère de même que la surface déférente pour définir une surface anallagmatique dans l'espace.

Envisageons sur la courbe A deux points correspondants M, M', le plan tangent le long de M' au cône H coupe la sphère Λ suivant un cercle Γ qui touche évidemment en M et M' la courbe A. Ce cercle Γ est du reste orthogonal au cercle Θ d'intersection de la sphère Λ avec le plan T polaire du point O par rapport à cette même sphère; en effet, le plan du cercle Γ passe par le pôle O du plan du cercle Θ. Abaissons du point I, centre de Λ, une perpendiculaire sur le plan du cercle Γ; ce plan étant tangent au cône H, la perpendiculaire

est une génératrice du cône H' supplémentaire. Cette perpendiculaire coupe le plan T en un point Q qui est le pôle du plan du cercle Γ; en effet, elle passe d'abord évidemment par le pôle du plan du cercle Γ, et ce pôle est d'autre part dans le plan T puisque le plan du cercle Γ passe au point O pôle du plan T. Ajoutons que la droite IQ perce la sphère en deux points N N' qui sont les centres sphériques du cercle Γ. (Je dis centres sphériques au lieu de pôles, puisque le mot pôle est employé dans une autre acception). Le lieu D de ces deux points N, N' est précisément cette courbe sphérique à laquelle on donne le nom de déférente de la courbe A. Cette courbe A peut donc se définir ainsi : C'est le lieu enveloppe des cercles Γ qui restent orthogonaux à un cercle fixe Θ, tandis que leurs centres sphériques décrivent une courbe donnée D, dite déférente. Θ est le cercle directeur.

Si l'on sort de la sphère, on peut définir encore la variation du cercle Γ, en considérant le lieu du point Q, pôle du plan du cercle Γ. Ce lieu est la trace du cône H' sur le plan T. Il n'a pas reçu de nom particulier, mais sa considération va nous être très utile.

Le lecteur démontrera sans peine que la courbe A est le lieu des centres des cercles de rayon nul tracés sur la sphère Λ que l'on peut faire passer par les deux points où les grands cercles tangents à la déférente D coupent le cercle directeur Θ.

L'analogie avec ce qui se passe dans l'espace est évidente ; les mots de surface déférente y sont remplacés par ceux de courbe déférente, et celui de sphère par celui de cercle.

Remarques sur l'application de l'inversion aux systèmes de sphères.

Je dois placer ici une proposition générale facile à établir et dont nous avons déjà rencontré un cas particulier, quand nous avons énoncé, comme une conséquence de l'invariance des angles par

inversion, que toutes les sphères orthogonales à une sphère fixe se transforment par inversion en un système analogue. C'était dire que tout système linéaire se change en un autre système analogue par inversion. Plus généralement, l'inverse d'un système de sphères de l'ordre m est un système de l'ordre m.

Prenons pour origine le pôle d'inversion, en sorte que cette transformation sera représentée par les formules

$$x' = \frac{p\,x}{x^2+y^2+z^2}, \qquad y' = \frac{p\,y}{x^2+y^2+z^2}, \qquad z' = \frac{p\,z}{x^2+y^2+z^2}$$

d'où

$$x'^2+y'^2+z'^2 = \frac{p^2}{x^2+y^2+z^2}.$$

Une sphère

$$\mathcal{E}(x^2+y^2+z^2) + \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$$

se transformera dans la sphère

$$\mathcal{E}p^2 + \alpha p\cdot x' + \beta p\cdot y' + \gamma p\cdot z' + \delta(x'^2+y'^2+z'^2) = 0,$$

ou

$$\mathcal{E}'(x'^2+y'^2+z'^2) + \alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta' = 0,$$

en posant

$$\frac{\mathcal{E}'}{\delta} = \frac{\alpha'}{\alpha p} = \frac{\beta'}{\beta p} = \frac{\gamma'}{\gamma p} = \frac{\delta'}{\mathcal{E}p^2}.$$

Un système de sphères de l'ordre m sera défini par une équation homogène d'ordre m,

$$F(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \mathcal{E}) = 0;$$

les sphères du système transformé vérifieront l'équation

$$F\left(\frac{\alpha'}{p}, \frac{\beta'}{p}, \frac{\gamma'}{p}, \mathcal{E}', \frac{\delta'}{p^2}\right) = 0,$$

qui est encore homogène et de l'ordre m. Le théorème est donc démontré.

Considérons pareillement l'ensemble des sphères qui font partie de deux systèmes d'ordre m, n; son inverse sera un ensemble analogue. Par exemple, les sphères qui font partie à la fois d'un système linéaire et

d'un système de l'ordre m auront pour inverses des sphères appartenant à la fois à un système de l'ordre m et à un système linéaire.

D'une façon générale, soient des sphères dépendant de K paramètres K = 1, 2 ou 3; ces sphères forment un ensemble E_K; supposons qu'on assujettisse en outre ces sphères à faire partie de K systèmes linéaires, arbitrairement choisis, mais fixés. Alors ces sphères seront déterminées. Si m est le nombre de celles qui vérifient ces conditions, nous dirons que m est l'ordre de l'ensemble E_K et nous le désignerons par le symbole E_K^m. (1)

Cela étant on a ce théorème général:

L'inverse d'un système E_K^m est un système E_K^m.

Soit en effet E_K' le système transformé de E_K'', assujettir les sphères du système E_K' à faire partie de K systèmes linéaires E_3'', F_3'', ... revient à assujettir les sphères du système E_K'' à faire partie de K systèmes linéaires E_3', F_3', ... Il y en a m du système E_K^m qui vérifient ces conditions, il en en aura donc aussi m du système E_K faisant partie des systèmes E_3'', E_3'', ... et par suite, E_K' est bien de l'ordre m.

Maintenant il est très facile de passer des sphères de l'espace aux cercles d'une sphère. Considérons des cercles sur une sphère Λ; ils y forment une triple infinité. Considérons l'un d'eux Γ et soit S la sphère orthogonale à Λ qui passe par Γ; le cercle Γ définit la sphère S aussi bien que S définit le cercle. On peut donc adopter comme coordonnées du cercle Γ sur la sphère Λ les coordonnées de cette sphère S, qui ne dépend plus que de trois variables puisqu'elle doit couper Λ à angle droit. Assujettir Γ à des conditions revient à assujettir S à autant de conditions. On peut même remarquer que le centre de S est justement le pôle Q du plan

---

(1) En particulier il y a m sphères du système qui passent par chaque point de l'espace si K = 1, ou par deux points si K = 2, ou par trois si K = 3.

du cercle Γ par rapport à la sphère Λ.

L'ordre d'un ensemble de cercles tracés sur la sphère Λ sera l'ordre de l'ensemble des sphères S correspondantes, et dès lors, l'ordre d'un système de cercles sur une sphère est encore quelque chose qui reste invariant par inversion.

La remarque suivante va mettre sans tarder en évidence l'importance des faits que nous venons d'exposer.

Effectuons une inversion en prenant comme pôle un point a de la sphère Λ qui contient l'anallagmatique sphérique A.

La sphère va se transformer en un plan V, parallèle au plan tangent en a à la sphère Λ. La transformation sera donc équivalente à une projection stéréographique de la sphère, faite du point a sur le plan V. Reprenons toutes les notations du numéro précédent.

Notre anallagmatique A se transformera en une courbe anallagmatique plane A_1; le cercle Γ tangent en M, M' à la courbe A se transformera en un cercle Γ_1, tangent en M_1, M'_1 à la courbe A_1. Ce cercle Γ_1 sera orthogonal au cercle fixe Θ_1, perspective du cercle Θ, et le centre Q_1 du cercle Γ_1 sera, d'après un théorème bien connu, la trace de la droite aQ. Le lieu du point Q est la courbe trace du cône H' sur le plan T; la perspective de cette courbe plane sera donc le lieu D_1 du point Q_1. Ce dernier lieu D_1, si l'on considère le plan V comme la limite d'une sphère, est la déférente de la courbe A_1 (lieu des centres des cercles enveloppés Γ). Nous arrivons donc à ce résultat, que la déférente de A_1 est la perspective de la trace du cône H' sur le plan T. Le degré de la déférente de l'anallagmatique plane est donc égal à celui du cône H'.

Ce degré est aussi celui du système E_1^m formé par les cercles Γ, ou ce qui revient au même, du système analogue formé par les cercles Γ_1.

En effet, prenons par exemple les cercles Γ. Le point Q, pôle du cercle Γ est justement le centre de la sphère S qui

coupe $\mathfrak{N}$ orthogonalement suivant ce cercle. Cette sphère S est donc assujettie 1°. - à être orthogonale à la sphère $\mathfrak{N}$, 2°. - à avoir son centre Q dans le plan T, et à décrire dans ce plan une courbe de l'ordre m, m étant le degré du cône H', puisque cette courbe est la trace de ce cône sur ce plan.

Assujettissons S à faire partie d'un système linéaire quelconque, c'est à-dire à être orthogonale à une sphère arbitraire $\mathfrak{N}'$.

Le centre de S devra alors être pris dans le plan radical des sphères $\mathfrak{N}, \mathfrak{N}'$; mais ce plan coupe en m points le lieu du point Q, par hypothèse, donc il y a m sphères S qui font partie d'un système linéaire arbitrairement choisi et par suite le théorème est démontré.

Un cas exceptionnel est à signaler, c'est celui où, dans le passage d'une anallagmatique sphérique à une anallagmatique plane le point de vue a serait pris sur le cercle Θ lui-même. Alors la ligne D_1 se confond avec la droite qui est la perspective du cercle Θ et nos cercles Γ ont leurs centres sur cette droite, il n'y a plus de déférente à proprement parler. Mais la propriété des cercles Γ, de former un système de l'ordre m se conserve, et malgré l'absence de la déférente permet encore de suivre sur l'anallagmatique A, dont D_1 est un axe de symétrie, les propriétés essentielles des anallagmatiques.

Un fait tout pareil se présenterait sur la sphère si le sommet du cône H se trouvait rejeté à l'infini. Alors H devient un cylindre et le cône H' se réduit au plan mené par le centre I de $\mathfrak{N}$ perpendiculairement aux génératrices du cylindre. Ce plan est un plan de symétrie de la courbe; il n'y a plus de déférente sphérique, le lieu des centres des cercles Γ est le cercle Θ, qui est devenu un grand cercle de la sphère $\mathfrak{N}$.

Mais la notion de système de cercles nous permet malgré cela de conserver la notion de l'anallagmatique.

Au surplus, ces singularités sont-elles essentielles? Assurément

non, puisqu'il suffit d'une inversion convenablement choisie pour les faire apparaître et d'une inversion quelconque pour en être débarrassé.

On engendre en effet ces singularités en opérant une inversion qui change en un plan la sphère directrice Σ.

Je vais appliquer ces considérations générales à l'étude d'un cas particulier fort important, celui des systèmes de cercles ou de sphères du second degré (1).

Les Courbes Cycliques.

Ces courbes ont été étudiées dans toute leur généralité par M. G. Darboux dans son ouvrage déjà cité. **Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces**. Depuis longtemps les géomètres connaissaient des cas particuliers de ces courbes, auxquelles appartiennent les ovales de Descartes et les ovales de Cassini. Les courbes cycliques résultent de l'intersection d'une sphère et d'une surface du second degré. Comme par l'intersection de deux quadriques il passe généralement quatre cônes du second degré dont les génératrices sont des cordes de la courbe, il faut en conclure que généralement, une cyclique est anallagmatique de quatre manières différentes. Je laisse de côté en commençant les cas particuliers.

Notre cyclique A sera tracée sur une sphère fixe Ω de centre I, et résultera de l'intersection de cette sphère avec quatre cônes H_1, H_2, H_3, H_4 du second degré et de sommets O_1, O_2, O_3, O_4. Ces quatre sommets formeront, comme on sait un tétraèdre conjugué par rapport à la sphère Ω. Les plans T_1, T_2, T_3, T_4 polaires par rapport à la sphère de O_1, O_2, O_3, O_4 seront dans les plans $O_2 O_3 O_4$, $O_3 O_4 O_1$, $O_4 O_1 O_2$.

(1) Je n'ai pas démontré que toute anallagmatique plane est la perspective stéréographique d'une anallagmatique sphérique. Il suffit évidemment d'effectuer une inversion qui change le plan en une sphère pour le démontrer.

$o_1\, o_2\, o_3$; ces plans couperont la sphère Ω suivant quatre cercles $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \Theta_4$; chacun de ces cercles sera le cercle directeur relatif à l'une des quatre inversions qui conservent le cercle A. Il existera ainsi quatre familles de cercles sur la sphère Ω, bi-tangents à la courbe A, et les cercles T_i d'une même famille seront orthogonaux à l'un des cercles Θ_i.

Les centres sphériques N_i, N_i' de ces cercles T_i[1], bitangents à A et orthogonaux à Θ_i, décrivent une courbe qui est, nous le savons, la trace sur la sphère Ω du cône H_i' supplémentaire du cône H_i,

Rappelons que H_i' est concentrique à Ω : il est, comme H_i du second degré, et par suite le lieu des centres sphériques N_i, N_i' des cercles T_i est une conique sphérique D_i.

Si l'on ne veut pas sortir de la sphère Ω, il est clair que la conique sphérique D_i qui est une courbe déférente, et le cercle directeur Θ_i peuvent suffire à définir la courbe A. Si donc on se donne, par exemple, D_1 et Θ_1, on doit pouvoir en déduire D_2, D_3, D_4 et $\Theta_2, \Theta_3, \Theta_4$.

Les théorèmes suivants concourent à cet objet:

Les cercles $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \Theta_4$, sont orthogonaux deux à deux.

En effet, leurs plans forment un tétraèdre conjugué par rapport à la sphère.

Les coniques sphériques D_1, D_2, D_3, D_4, sont homofocales.

Il suffit de montrer que les cônes H_1', H_2', H_3', H_4' sont homofocaux, c'est-à-dire qu'ils ont avec le cône isotrope concentrique Ξ les mêmes plans tangents communs. Il faut et il suffit pour cela que si l'on prend les polaires réciproques par rapport au cône Ξ, les quatre cônes transformés coupent le cône Ξ suivant les mêmes droites. Or ces cônes transformés sont évidemment les

---

[1] On observera que nous conservons les notations précédentes, sauf l'indice i qui sert à distinguer les quatre inversions.

cônes supplémentaires H_1, H_2, H_3, H_4. Il faut donc prouver que ces quatre cônes sont homocycliques, c'est-à dire, possèdent les mêmes plans de section circulaires, ou, ce qui revient au même, coupent au même point le cercle de l'infini. Mais ce dernier fait est évident. Le cône H_1, par exemple, coupe le cercle de l'infini en quatre points qui appartenant à la sphère Ω, puisqu'elle contient le cercle de l'infini, sont précisément les quatre points à l'infini de notre courbe A. Ces quatre points appartiennent donc aux trois autres cônes H_2, H_3, H_4, puisqu'ils contiennent chacun tous les points de la courbe A.

Pour achever le passage d'un système D_1, Θ_1 de génération à un autre D_2, Θ_2, j'emploierai la méthode suivante qui ne diffère pas de celle qui a été donnée par M.r Darboux.

Le cercle Θ_1 coupe la cyclique A en quatre points. En effet, soit M_1 un point de A; M'_1 son inverse par rapport au cercle Θ_1[1], d'après ce que nous savons, le grand cercle E élevé perpendiculairement à l'arc de grand cercle $M_1 M'_1$ en son milieu touche D_1. Si M_1 vient sur Θ_1, M'_1 y vient aussi; E devient le grand cercle normal en M_1 à A, en même temps qu'il devient tangent en M_1 au cercle Θ_1. Les points M_1, M'_1, M''_1, M'''_1 où le cercle Θ_1 coupe la cyclique A sont donc les points de contact de Θ_1 avec les grands cercles tangents à la fois à Θ_1 et à la déférente D_1.

Ceci étant, considérons par exemple, le second système D_2 Θ_2. L'inversion qui a pour base la sphère Σ_2, orthogonale à Ω suivant Θ_2, change en elle même l'anallagmatique; elle change aussi en lui-même le cercle Θ_1. Elle fait donc correspondre au point M_1 l'un des trois autres points, par exemple M'_1, et

---

[1] C'est à-dire, son inverse dans l'inversion qui admet comme sphère d'inversion la sphère Σ, orthogonale à la sphère Ω le long du cercle Θ_1.

alors, à M_1'' elle fait correspondre M_1'''. Les arcs [illegible] $M_1 M_1'$ et $M_1'' M_1'''$ déterminent donc les centres [illegible] du cercle Θ_2. Pareillement, $M_1 M_1''$ et $M_1' M_1'''$ donneraient les centres de Θ_3, et $M_1 M_1'''$, $M_1'' M_1'$ donneraient les centres de Θ_4 [illegible].

Les centres des cercles Θ_2, Θ_3 Θ_4 sont les faces [illegible] du quadrilatère formé par les points M_1, M_1', M_1'', M_1'''.

Il est maintenant facile d'avoir D_2.

Considérons les points M_1, M_1', les arcs de grands cercles tangents en ces points au cercle Θ_1 définissent les centres N_2, N_2' d'un cercle Γ_2 qui passe par M_1, M_1' et est orthogonal à la fois aux cercles Θ_1 et Θ_2; ce cercle Γ_2 est d'ailleurs tangent en M_1 et M_1' à la cyclique A puisque nous avons vu que la cyclique est coupée à angle droit par le cercle Θ_1. Le cercle Γ_2 est donc un cercle du système de génération D_2, Θ_2, et [illegible] sont deux points de D_2; on en aurait deux autres en considérant les points de rencontre N_1'', N_1''' des grands cercles tangents en M_1'', M_1''' au cercle Θ_1.

On considérera donc les arcs de grands cercles E_1, E_1', E_1'', E_1''', tangents en M_1, M_1', M_1'', M_1''' au cercle Θ_1, et eu égard aux notations adoptées:

Les cercles E_1 et E_1' se couperont sur D_2 ainsi que E_1'' et E_1'''. Ils se couperont sur D_3, E_1 et E_1'', E_1' et E_1'''; et enfin sur D_4, E_1 et E_1'''; E_1'' et E_1'.

On pourra voir dans le livre de Mr Darboux comment ce résultat se rattache aux belles recherches de Mr Chasles sur les coniques homofocales.

Les Cycliques Planes.

Si nous faisons une projection stéréographique de la sphère, toute cyclique qui s'y trouve tracée se transforme en

une cyclique plane. Tous les théorèmes que nous venons d'établir au sujet des cycliques sphériques subsistent sans modifications. L'existence des quatre modes de génération est une conséquence immédiate des propriétés de la projection stéréographique; de même pour l'orthogonalité des quatre cercles directeurs.

On voit peut-être moins immédiatement que les courbes déférentes sont des coniques homofocales. On pourrait faire un raisonnement à la limite en supposant une sphère dont le rayon croîtrait indéfiniment, mais il vaut mieux procéder de la manière suivante:

Considérons un mode de génération sur la sphère (D_1, Θ_1) et effectuons une projection stéréographique qui changera Θ_1 en un cercle Θ'_1. Le cône H_1' concentrique à la sphère Ω, qui a D_1 pour base, coupe le plan du cercle Θ_1 suivant une conique qui est le lieu des pôles (dans l'espace) des cercles Γ_1 du système considéré. La perspective de cette conique X_1 est une conique X'_1, et c'est de plus, comme on sait, le lieu des centres des cercles Γ'_1, perspectifs aux cercles Γ_1. Notons ici que la conique X_1 est précisément la polaire réciproque du cône H_1 par rapport à la sphère Ω.

Prenons la conique X_2 polaire réciproque par rapport à Ω du cône H_2, et soit X'_2 sa projection stéréographique; il faut prouver que X'_1 et X'_2 sont homofocales. Soit en effet F' un foyer de X'_1, et F le point correspondant sur la sphère; par F il passe deux droites isotropes Δ_1, Δ'_1, sur la sphère dont l'ensemble constitue un cercle de rayon nul qui a pour perspective le cercle de rayon nul dont F' est le centre, ce dernier cercle étant bi-tangent à X'_1, il en résulte que le plan mené par Δ et le point de vue O, ainsi que le plan mené par O et Δ' sont tangents à la conique de l'espace X_1. Or, considérons un de ces plans, par exemple le plan $O\Delta$; puisqu'il passe par une

génératrice rectiligne Δ de la sphère il lui est tangent, ce plan est donc tangent à la fois à la sphère Ω et à la conique X_1; mais alors il est aussi tangent à X_2, car les cônes H_1, H_2 coupant la sphère Ω suivant une même courbe, leurs polaires réciproques X_1, X_2 ont les mêmes plans tangents communs avec Ω. Les deux plans $o\Delta$, $o\Delta_1$ sont donc tangents à X_2 et leurs traces sur le plan du tableau, qui sont les droites isotropes issues de F' sont ainsi tangents à X'_2. Il est ainsi prouvé que tout foyer de X'_1 est foyer de X'_2.

Je reviendrai sur les cycliques planes à l'occasion des cas particuliers.

Des Cas particuliers.
Singularités essentielles et apparentes.

En ce qui concerne les cas particuliers, j'établirai d'abord une distinction capitale. Parmi les singularités qui se peuvent rencontrer il en est qu'on peut faire apparaître ou disparaître par simple inversion, on peut dire de ces singularités qu'elles ne sont qu'apparentes. D'autres au contraire se conservent à travers toute inversion, et ce sont elles qui méritent le plus notre attention. Il suffit pour les reconnaître, de raisonner dans le cas d'une cyclique sphérique, puisque une simple inversion ramène à ce cas.

La classification des cycliques coïncide donc dans une certaine mesure avec la discussion de l'intersection d'une sphère et d'un cône du second degré.

Nous ferons abstraction des courbes cycliques imaginaires, malgré que les plus récents travaux sur la géométrie prouvent combien s'impose désormais dans les discussions la considération des courbes imaginaires. Nous n'aurons donc aucun cas

de décomposition à introduire, puisque le seul de ces cas qui fournit une cyclique réelle conduirait à un couple de cercles. En général, le cône H, et la sphère S peuvent se toucher en un point, ou même donner lieu à une courbe douée d'un point de rebroussement.

Dans le premier cas, la courbe A possède un point double O_1; des quatre cônes du second degré qui passent par A deux coïncident avec celui H, qui admet O_1 pour sommet; il y en a ensuite deux autres, dont les sommets O_2, O_3 sont dans le plan tangent en O_1 à la sphère S. Il est clair que dans ce cas, la courbe n'est anallagmatique que de deux manières, car le cône H, ne peut être la base d'une génération anallagmatique puisque son sommet est sur la sphère.

Ainsi, l'acquisition d'un point double a fait perdre à la courbe deux de ses modes de génération par anallagmatie. Si la courbe possède un point de rebroussement au point O_1, un des points O_2, O_3 vient coïncider avec O_1 et le cône H, non-seulement a son sommet sur la sphère S, mais encore touche le plan tangent en O_1 à cette sphère. Il n'y a plus avec H, qu'un seul cône H_2 de sommet O_2 et la courbe n'est plus anallagmatique que d'une seule manière.

L'acquisition d'un point de rebroussement fait donc perdre à la courbe trois anallagmaties.

Telles sont les singularités véritablement essentielles et qui se maintiennent par inversion.

Nous allons maintenant appliquer à ces cycliques spéciales des inversions spéciales de manière à obtenir d'autres types particuliers. Mais il demeurera bien évident que les nouvelles singularités que nous allons obtenir sont de celles que nous avons caractérisées d'apparentes.

Nous appellerons type A le type général des cycliques

sphériques ; type B le type général à point double ; type C le type général à point de rebroussement.

Types dérivés du type A par inversion.

Effectuons une inversion qui change en un plan la sphère Σ_1 orthogonale à Ω le long du cercle Θ_1 ; on obtient un type dans lequel Θ_1 est devenu un grand cercle de la sphère ; l'anallagmatie correspondante est devenue une symétrie ; on a une cyclique située sur un cylindre du second degré et douée d'un plan de symétrie.

On peut aussi réduire à un plan, en même temps que Σ_1, une sphère analogue Σ_2 et on obtient alors une cyclique douée de deux plans de symétrie, tracée sur deux cylindres du second degré.

On peut enfin réduire à trois plans trois des quatre sphères d'anallagmatie Σ_1, Σ_2, Σ_3 ; il suffit de prendre comme pôle d'inversion un point commun à ces trois sphères. La courbe A acquiert alors trois plans de symétrie rectangulaires se croisant en un point O, qui est forcément le centre de la sphère Ω ; la courbe se trouve ainsi être une conique sphérique. On peut donc énoncer ce théorème.

La cyclique sphérique la plus générale résulte par inversion d'une conique sphérique.

Si l'on prend le pôle d'inversion V sur la sphère Ω qui contient la cyclique, celle-ci se transformera, avons-nous vu, en une courbe plane. Cette courbe plane est la projection stéréographique de la courbe, V étant le point de vue ; son degré est celui du cône du sommet V qui contient la cyclique sphérique. Or le degré de ce cône est évidemment 4 ou 3 selon que le point V est quelconque sur la sphère Ω, ou bien qu'il est pris sur la courbe sphérique. Nous aurons donc des cycliques planes du 4ème et du 3ème degré.

Examinons d'abord les premières. Par le point V passent

deux droites isotropes, génératrices rectilignes de la sphère $\mathcal{S}$ qui coupent chacune en deux points (p. 6) la cyclique sphérique. Les deux points situés sur une même génératrice issue de V, ayant même projetante, se projetteront au même point et ce point sera évidemment un des points circulaires du plan du tableau. La cyclique plane est donc du quatrième ordre et bi-circulaire, en ce sens que deux de ses branches se croisent en chaque point circulaire.

Réciproquement, et c'est là un théorème important, toute courbe plane du 4ème ordre bi-circulaire est la projection stéréographique (l'inverse) d'une cyclique sphérique. En effet, soit A' une telle courbe plane; faisons une inversion quelconque qui la change en une courbe A tracée sur une sphère $\mathcal{S}$. Cette courbe A est du quatrième ordre. Pour le voir, je la coupe par un cercle arbitraire T de la sphère $\mathcal{S}$; ce cercle est l'image d'un cercle T' du plan de A'. Or le cercle T' coupe A' en huit points dont quatre sont à l'infini, car chaque point circulaire compte pour deux; il en résulte que A' est coupée par T' en $8 - 4 = 4$ points à distance finie; donc le cercle T coupe aussi A en quatre points et par suite, tout plan coupe en 4 points la courbe A, qui se trouve ainsi être du 4ème degré. D'après les résultats établis (p. 6) il y a sur une quadrique deux sortes de courbes du 4ème ordre; les unes coupent en deux points les génératrices de chaque système et sont engendrées par la rencontre de cette quadrique avec les autres quadriques de l'espace. Les courbes de la seconde espèce (quartiques de Steiner) coupent en trois points les génératrices d'un système et en un seul celles de l'autre. Sur une sphère ces dernières sont toujours imaginaires, et d'ailleurs leur projection stéréographique est une courbe qui admet comme point triple un des points circulaires du plan du tableau et comme point simple l'autre point circulaire. Si donc il n'y a pas de doute possible, la courbe A qui est du 4ème degré ne peut être qu'une quartique de la première espèce et par suite

c'est une cyclique sphérique.

Une courbe cyclique plane générale admet nous le savons, quatre générations anallagmatiques. Si l'on prend le point de vue V sur l'un des cercles Θ_i, une des quatre anallagmaties devient une symétrie et si le point V est à la rencontre de deux cercles Θ_i, la courbe acquiert deux axes de symétrie en perdant deux anallagmaties.

Si maintenant le point de vue V est pris sur la courbe sphérique elle-même, la cyclique plane transformée est seulement du 3me degré. Mais à part cela elle possède toutes les propriétés des cycliques du 4ème. Les droites isotropes issues de V et tracées sur la sphère S coupent la courbe sphérique d'abord en V et puis chacune en un autre point. La perspective de ces deux points fournit les points circulaires du plan du tableau. On reconnait ainsi que la courbe du 3ème degré est circulaire, en ce sens qu'elle passe par les points circulaires.

Réciproquement on verra par le même raisonnement qui a été déjà fait pour les quadriques bi-circulaires, que toute cubique circulaire est l'inverse d'une cyclique sphérique.

Les déférentes des cycliques planes du troisième degré présentent une particularité importante.

Le point de vue V étant ici sur la courbe d'intersection de la sphère avec les quatre cônes H_i, le plan tangent en V à la sphère est tangent aux quatre coniques X_i, polaires réciproques de ces cônes par rapport à la sphère. Les cônes qui ont pour base les coniques X_i et V pour sommet, sont donc tangents à la sphère au point V, leurs traces X'_i sur le plan du tableau sont donc quatre paraboles ; mais comme ces coniques X'_i sont les déférentes de la cyclique plane on voit que l'on peut énoncer ce théorème :

Les déférentes d'une cubique circulaire sont quatre paraboles.

Notre démonstration même prouve l'exactitude de la réciproque de ce théorème, car on ne peut avoir de déférente parabolique

sans que le cône de sommet V et ayant X_1 pour base touche la sphère au point V ; s'il en est ainsi, on voit, en prenant les polaires réciproques par rapport à la sphère, que le point V qui est déjà sur la sphère doit être aussi sur le cône H_1, réciproque de X_1. Il est donc sur la cyclique et la courbe plane est une cubique.

Si le point de vue est pris en un point de rencontre de la cyclique et de l'un des cercles Θ_i on obtient comme transformée une cubique circulaire douée d'un axe de symétrie et de trois anallagmaties. Dans ce cas, d'un axe de symétrie, la cubique a ses deux branches d'un même côté de son asymptote réelle, ce qui s'exprime en disant que le point à l'infini correspondant est un point d'inflexion de la courbe.

En plaçant encore ailleurs le point de vue on peut obtenir d'autres singularités, mais nous les retrouverons plus loin.

Types dérivés du type B.

On peut caractériser d'un mot les cycliques du type A et leurs dérivées en disant qu'elles sont elliptiques ou de premier genre. Celles des types B et C sont unicursales.

Examinons d'abord le type B. Soit H_1 le cône qui a son sommet sur la sphère, H_2, H_3 les trois autres. Les cercles de la sphère Σ dont le plan touche H_1 enveloppent la courbe ; ils passent tous au point O_1, sommet de H_1. On peut dire de ces cercles qu'ils sont orthogonaux à un cercle Θ, de centre O_1, de rayon nul. Ils représentent donc une génération anallagmatique exceptionnelle de la courbe : le lieu D_1 de leurs centres sphériques est une déférente exceptionnelle. Il reste deux cercles Θ_2, Θ_3 d'anallagmatie et en prenant le pôle d'inversion sur Σ, ou bien à la fois sur Σ_2 et Σ_3, on aura une cyclique avec un ou deux plans de symétrie, situés sur un ou deux cylindres du second degré, tangents à la sphère Σ au point O. (on désigne, je

je le rappelle, par Σ_1 la sphère orthogonale à $\mathcal{S}$ le long de Θ_1).

Si le pôle d'inversion V est sur $\mathcal{S}$, on a une cyclique du 4ème ordre, plane à point double ; du 3ème au contraire si V est sur le cyclique. Enfin, par un choix plus précis du point V, on peut obtenir une courbe du 4ème ordre avec une ou deux symétries, ou une courbe du 3ème ordre avec une symétrie.

Types dérivés du Type C.

Enfin si la cyclique a un rebroussement O_1, ce point est le sommet d'un cône H_1, tangent à la sphère $\mathcal{S}$; il existe en outre un autre cône H_2 du second degré contenant la courbe, et un cercle Θ_2 d'anallagmatie. En prenant le pôle d'inversion sur Σ_2, on peut faire dégénérer cette anallagmatie en une symétrie.

En prenant le pôle sur la sphère, on a une cyclique plane à rebroussement du 4ème ou du 3ème degré, douée d'une anallagmatie. On peut faire dégénérer l'anallagmatie en une symétrie en prenant le pôle sur le cercle Θ_2.

Telles sont, à grands traits, les diverses sortes de cycliques. Les propriétés focales nous conduiront dans quelques instants à quelques autres particularités remarquables. Mais je vais auparavant indiquer le lien intéressant qui existe entre les podaires et les cycliques planes à point double.

Podaires et inverses de coniques dans le plan.

Les coniques sont des cycliques, si l'on convient d'appeler cycliques les courbes planes ou sphériques qui sont l'enveloppe d'un système de cercles du second degré. En effet, considérons une cyclique à point double O_1, tracée sur une sphère $\mathcal{S}$, et faisons la projection stéréographique en plaçant le point de vue en O_1. Le cône projetant sera le cône H, déjà considéré ; sa trace sur le plan du tableau sera

une conique, et les deux anallagmaties de la courbe de l'espace donneront dans le plan du tableau les deux familles de cercles bi-tangents à la conique. Ces deux familles seront du second degré comme celles de la courbe sphérique, attendu que l'inversion conserve le degré des familles de cercles.

Notons aussi que si le cône H, touche la sphère en O, le plan du tableau le coupe suivant une parabole. Nous savons que la cyclique sphérique possède alors un rebroussement en O, et n'admet plus qu'une famille de cercles bi-tangents, et en effet, dans la parabole perspective il n'y a qu'une famille de cercles bi-tangents. Cette famille est du second degré comme celle de l'espace.

Les coniques sont donc des enveloppes de cercles formant une famille du second degré; elles sont à cet égard des cycliques.

Effectuons dès lors une inversion conservant le plan de la conique (nous dirons une inversion plane); l'inverse de la conique sera une cyclique ayant un point double au pôle d'inversion; les tangentes en ce point double étant d'ailleurs les directions asymptotiques de la courbe. En effet, les familles de cercles bi-tangents vont se transformer en des familles de cercles bi-tangents avec conservation du degré; ajoutons que les cercles directeurs seront, pour la cyclique transformée, les inverses des axes de la conique proposée, puisque ceux-ci sont respectivement orthogonaux aux cercles de chacune des familles afférentes à la conique. Les tangentes à la conique vont devenir aussi des cercles tangents à la cyclique et passant tous au point double de la courbe. Ces cercles constituent donc la génératrice anallagmatique exceptionnelle qui appartient aux cycliques à point double.

Voilà ce que sont les inverses de coniques.

Je vais prouver que, réciproquement, toute cyclique plane à point double est une inverse de conique et de plus la podaire d'une autre conique.

En effet, nous avons vu que, dans l'espace, les cycliques sphériques à point double O_1, possèdent une génération anallagmatique exceptionnelle, dans laquelle le cercle directeur Θ, a un rayon nul et son centre au point O_1. La stéréographie conserve cette propriété, et les cycliques planes à point double O_1 possèdent une génération exceptionnelle dans laquelle les cercles enveloppés passent tous en O_1.

Faisons une inversion de pôle O_1, ces cercles deviendront des droites formant un système du second degré. Cela signifie que ces droites enveloppent une conique. En effet, un système du second degré est défini par une équation linéaire et une équation du second degré entre les coordonnées homogènes $\mathcal{C}, \alpha, \beta, \delta$ du cercle

$$\mathcal{C}(x^2+y^2) - 2\alpha x - 2\beta y + 2\delta = 0;$$

Soient ces équations

$$A\alpha + B\beta + D\delta + E\mathcal{C} = 0$$

$$f(\alpha, \beta, \delta, \mathcal{C}) = 0.$$

Si la première de ces équations se réduit à $\mathcal{C} = 0$, tous les cercles de la famille se réduisent à des droites, et l'équation du second degré

$$f(\alpha, \beta, \delta, 0) = 0,$$

exprime que ces droites

$$\alpha x + \beta y - \delta = 0$$

touchent une conique.

Mais on peut démontrer autrement ce théorème. Considérons en effet la déférente exceptionnelle D_1. La cyclique à point double est l'enveloppe des cercles dont les centres M sont sur D_1, et qui passent par le point double O_1. Menons en M la tangente à D_1, MT, et abaissons de O_1 une perpendiculaire sur MT, qui coupe MT en Q et le cercle T, de centre M et de rayon MO_1, en P. Puisque O_1P est une corde de ce cercle et MT le diamètre perpendiculaire, Q est le milieu de O_1P. La parallèle PS à MT menée par P enveloppe donc, lorsque

M se déplace sur D_1, une conique D'_1 homothétique à D_1 (O_1, pôle d'homothétie ; 2, module d'homothétie). La cyclique est d'ailleurs touchée par le cercle I au point P, car la construction précédente est celle qui fournit le point de contact de I avec son enveloppe ; cette courbe apparait donc comme la podaire de D'_1 par rapport au point O_1.

Ayant ainsi prouvé que toute cyclique à point double est une podaire de conique, il est très facile de faire voir qu'une telle courbe est aussi une inverse de coniques.

Prenons en effet la podaire d'une conique D'_1 par rapport à un point O_1 ; soit M' un point de D'_1, M'S la tangente, O_1P la perpendiculaire abaissée de O_1 sur M'S, P le pied de cette perpendiculaire. Effectuons une inversion de la cyclique lieu du point P, en prenant O_1 comme pôle d'inversion ; soit p la puissance d'inversion. Il faudra prendre sur O_1P un point R tel que

$$O_1P \cdot O_1R = p.$$

Or, le point R ainsi construit est le pôle de la droite M'S par rapport au cercle de rayon $\sqrt{p}$ et de centre O_1. Le lieu du point R ou la courbe inverse de la cyclique, est donc la polaire réciproque de D'_1 par rapport à ce cercle. Comme p est quelconque on a donc ce théorème :

Toute cyclique plane à point double O_1 est la podaire d'une conique D'_1 par rapport au point O_1 ; elle est l'inverse (O_1 étant le pôle de toute conique polaire réciproque de D'_1 par rapport à un cercle arbitraire de centre O_1.

Ce théorème, qui établit un lien entre les podaires et l'inversion peut être généralisé, car rien n'exige que D'_1 soit une conique pour que la podaire de D'_1 par rapport à un point O_1 soit l'inverse de la courbe polaire réciproque de D'_1 par rapport à un cercle quelconque de centre O_1.

Les remarques faciles abondent.

La cyclique est du 4ème degré tant que le point O_1 n'est pas

sur la conique inverse, et, par conséquent, tant que D'_1 n'est pas une parabole. Elle s'abaisse au troisième degré dans le cas contraire. Le point O, est un point double à tangentes distinctes tant que C_1 n'est pas sur D'_1, et par conséquent, tant que la conique inverse n'est pas une parabole. Dans le cas contraire on a un rebroussement.

Des Foyers des Focales.

Un foyer d'une surface ou d'une courbe dans l'espace est un point centre d'une sphère de rayon nul bi-tangente à la courbe ou à la surface. Un tel point demeure indéterminé, et on appelle focale la courbe lieu des points qui répondent à cette définition. Si ce lieu se décompose en plusieurs courbes, chacune d'elles reçoit le nom de focale.

Considérons un foyer F d'une surface; le cône isotrope (sphère de rayon nul) qui a F pour centre, touche en deux points M, M' la surface; appelons Π, Π' les plans tangents à ce cône isotrope le long des génératrices FM, FM', et soient I, I' les points à l'infini de ces génératrices. Les plans Π, Π' touchent respectivement en I, I' le cercle de l'infini, puisque ce cercle est sur le cône, et en M, M' la surface.

Cela étant, concevons que le point F décrive la focale qui le contient; les plans Π, Π' vont rouler sur le cercle de l'infini et sur la surface, et engendrer ainsi chacun deux nappes de la développable circonscrite à la fois à la surface et au cercle de l'infini. Les droites IM, et I'M' sont les génératrices de contact de ces nappes avec les plans Π et Π'; comme ces droites se coupent au point F, on voit que la focale, lieu de ce point, sera une courbe de rencontre des deux nappes de la développable considérée. Elle sera donc une courbe double de la développable circonscrite à la fois au cercle de

l'infini (développable isotrope) et à la surface.

Réciproquement, Soit une courbe double de cette développable, F un point pris sur cette courbe double. Les deux génératrices de la développable (une sur chaque nappe) qui se croisent en ce point, touchent la surface respectivement en deux points M, M' et vont rencontrer en I, I' le cercle de l'infini. Les plans Π, Π' tangents en M, M' à la surface, touchent également en I, I' respectivement le cercle de l'infini, car ce sont les plans tangents à la développable isotrope. Si donc on considère le cône isotrope qui a F pour centre, ce cône touche les plans Π, Π' suivant les droites FMI, FM'I' et se trouve ainsi tangent en M et M' à la surface. Donc F est un foyer.

Si, au lieu d'une surface, on considère une courbe, les mêmes raisonnements s'appliquent et l'on peut dire que:

Les focales d'une courbe ou d'une surface sont les courbes doubles de la développable isotrope qui leur est circonscrite.

Il ne faudrait pas trop se hâter d'en conclure que les focales d'une surface sont focales les unes des autres.

Ainsi, si une surface possède m sphères de rayon nul circonscrites, ces m sphères font partie de la développable isotrope circonscrite, et cependant les $\frac{m(m-1)}{2}$ cercles d'intersection de ces sphères courbes doubles de cette développable, ne sont pas des focales les uns par rapport aux autres. L'origine de cette distinction se trouve dans une notion capitale ingénieusement développée par Laguerre, celle des courbes de direction.

Considérons une courbe A dans l'espace, plane ou gauche; par chacune de ses tangentes MT on peut mener deux plans tangents au cercle de l'infini. L'enveloppe de ces plans est la développable isotrope circonscrite à la courbe. Ce serait une erreur de croire que les deux nappes de cette développable qui se croisent suivant la courbe A ne sont jamais algébriquement distinctes.

Soient x, y, z les coordonnées du point M de la courbe A, la tangente a pour équations, x étant prise pour variable,

$$X - x = \frac{Y-y}{y'} = \frac{Z-z}{z'},$$

et tout plan mené par la tangente MT,

$$\rho(Z-z) + Y - y - (\rho z' + y')(X-x) = 0;$$

exprimons que ce plan est isotrope, il vient

$$\rho^2 + 1 + (\rho z' + y')^2 = 0,$$

ou

$$(1+z'^2)\rho^2 + 2z'y'\cdot\rho + 1y'^2 = 0,$$

et, par suite,

$$\rho = \frac{-y'z' \pm i\sqrt{1+y'^2+z'^2}}{1+z'^2}$$

Il est clair que y', z' sont des fonctions rationnelles[1] des coordonnées x, y, z du point M. Pour que les deux nappes de la surface développable se séparent, il faut et il suffit que les deux plans isotropes issus de MT se séparent c'est-à-dire, dépendent rationnellement de x, y, z; il faut et il suffit que ρ soit fonction rationnelle de x, y, z, ou enfin, que

$$\sqrt{1+y'^2+z'^2} = R(x, y z)$$

soit fonction rationnelle de x, y, z.

Lorsqu'il en est ainsi, les cosinus directeurs d'une direction sur la tangente ont pour expressions

$$\frac{1}{R(x,y,z)}, \quad \frac{y'}{R(x,y,z)}, \quad \frac{z'}{R(x,y,z)},$$

Ce sont des fonctions rationnelles des coordonnées du point M. Ces courbes possèdent donc la propriété que l'on peut déterminer rationnellement sur elles un sens de parcours : de là le nom de courbes de direction attribué par Laguerre à ces courbes remarquables. On observe, en passant, que la courbe indicatrice sphérique des tangentes à ces courbes est du même genre qu'elles. Celles d'entre elles qui sont unicursales sont

---

[1] Il ne s'agit évidemment que de courbes algébriques.

rectifiables.

Ceci posé, revenons à nos focales. Une courbe qui n'est pas de direction est toujours focale de toute courbe tracée sur sa développable isotrope, car cette développable ne se décompose pas. Si, au contraire, elle est une courbe de direction, deux développables isotropes N, N' la contiennent, et elle n'est la focale d'aucune courbe tracée **sur une seule** de ces développables. Elle est, au contraire, la focale de toute courbe qui, en dehors d'elle, pourrait être commune à ses deux développables focales.

On voit ainsi que si deux courbes sont focales l'une de l'autre, ou bien aucune n'est de direction ou bien toutes deux le sont et elles ont alors les deux mêmes développables focales.

Dans l'exemple cité, les cercles sont bien des courbes de direction, mais pour aucun couple les deux développables focales ne sont les mêmes.

Ajoutons enfin que, dans le cas des surfaces, on appelle développable **focale** singulière la développable circonscrite à la surface tout le long du cercle de l'infini, dans l'hypothèse où la surface contient ce cercle, et focales singulières les courbes doubles de cette développable.

Les courbes planes, considérées dans leur plan, donnent lieu également à des foyers, qui sont les centres des cercles de rayon nul bi-tangents.

Si la courbe passe aux points circulaires, les points de rencontre des tangentes en ces points (asymptotes isotropes) sont les foyers singuliers de la courbe.

Les Foyers des Cycliques.

Considérons une cyclique sphérique; on a vu qu'elle est l'enveloppe de quatre familles de cercles du second degré. Soit un

mode de génération (D_i, Θ_i) et appelons Γ_i les cercles enveloppés correspondants. Une sphère de rayon nul bi-tangente à la cyclique coupe la sphère Ω qui la contient suivant un cercle bi-tangent, dont le plan est forcément tangent à l'un des cônes H_1, H_3, H_{11}, H_4.

Les focales seront donc ici le lieu des sommets des sphères de rayon nul menées par tous les cercles Γ_i ; d'après le procédé de génération dû à Laguerre (p. 124) ce lieu est une cyclique intersection du cône H'_i (concentrique à Ω et supplémentaire de H_i) avec la sphère Σ_i, concentrique à H_i qui coupe Ω à angle droit suivant Θ_i. Appelons Φ_i cette cyclique. Comme il y a quatre cônes H'_i et quatre sphères Σ_i nous aurons donc quatre cycliques Φ_i, focales de la cyclique proposée, que j'appellerai Φ_0.

Ces cinq cycliques $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4$ offrent une configuration remarquable. Elles sont focales les unes des autres.

Les cinq sphères qui les contiennent sont orthogonales deux à deux.

Par chacune passent quatre cônes du second degré dont les sommets sont les centres des quatre sphères qui ne la contiennent pas. Si l'on considère deux d'entre elles Φ_i et Φ_k, le cône de centre O_k qui contient Φ_i et le cône de centre O_i qui contient Φ_k sont supplémentaires.

Les résultats subsistent par inversion car les focales d'une surface ou d'une courbe ont pour transformées les focales de la transformée de la surface ou de la courbe. Cela tient à ce que, si F est le centre d'une sphère de rayon nul bi-tangente à une surface ou à une courbe, l'inverse de F est le centre d'une sphère de rayon nul, inverse de la première, et bi-tangente à la transformée de la surface ou de la courbe.

Si donc, par inversion, une des sphères Σ_i devient un plan

la cyclique focale Φ_i devient plane.

On voit qu'une cyclique plane a quatre focales, qui sont généralement des cycliques sphériques. Ces focales coupent le plan de la cyclique plane en des points qui sont précisément les centres des cercles de rayon nul bi-tangents à la courbe. Une cyclique plane a donc seize foyers. Ces seize foyers s'obtiennent directement en remarquant que les cercles de rayon nul du système Γ_i ont leurs centres à la fois sur D_i et sur Θ_i. Les foyers sont donc à la rencontre d'une déférente avec le cercle directeur correspondant.

Il est aisé d'obtenir les foyers singuliers ; considérons pour cela un cercle générateur Γ_i ; soit M_i son centre, situé sur D_i ; soit $M_i T_i$ la tangente à D_i en M_i, et P_i, Q_i les points où la perpendiculaire abaissée de O_i sur $M_i T_i$ coupe le cercle Γ_i ; ces points P_i, Q_i sont ceux où le cercle Γ_i touche la cyclique. Pour que le point P_i aille coïncider avec un point circulaire il faut et il suffit que $M_i T_i$ soit parallèle à une droite isotrope ; la tangente en P_i à la cyclique est toujours la tangente en P_i au cercle Γ_i ; mais ici, puisque P_i est à l'infini, cette tangente sera l'asymptote $M_i P_i$ du cercle, c'est-à-dire, la tangente à l'ellipse. Les asymptotes isotropes de la cyclique sont donc tangentes aux déférentes. Les foyers singuliers sont ainsi les foyers des déférentes, ce qui explique que celles-ci soient homofocales.

Sans insister outre mesure sur ces propriétés focales dont le lecteur trouvera le développement complet dans le livre de MG. G. Darboux, je dois indiquer quelques cas particulièrement remarquables.

Reprenons les cinq cycliques $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4$ focales l'une de l'autre ; appelons O_i le centre de la sphère qui contient Φ_i et Σ_i cette sphère, comme plus haut. Les quatre déférentes sphériques de Φ_i sont les traces sur Σ_i des quatre cônes du second degré de sommet O_i qui passent par les quatre autres cycliques.

D'après cela, supposons que Σ_i devienne un plan ; les quatre déférentes sphériques deviennent les quatre déférentes planes de la cyclique (devenue plane) ; le point O_i est à l'infini et les quatre cônes ci-dessus sont quatre cylindres normaux au plan Σ_i, ayant pour sections droites les quatre déférentes. Chacun de ces cylindres contient une des quatre autres cycliques, qui admettent d'ailleurs Σ_i pour plan de symétrie.

En particulier, si la cyclique plane est une courbe du 3ème degré, ses quatre déférentes sont des paraboles et les quatre cylindres sont des cylindres paraboliques. Les quatre focales d'une cubique circulaire proviennent donc chacune de l'intersection d'un cylindre parabolique et d'une sphère.

Le raisonnement prouve du reste que, réciproquement, si une cyclique admet pour focale une cubique circulaire, elle résulte de l'intersection d'une sphère et d'un cylindre parabolique.

Ces cycliques sont particulièrement remarquables. Alors que toute cyclique coupe en quatre points distincts le cercle de l'infini, celles-ci le touchent en deux points ; aux points où ce cercle est coupé par la génératrice de contact du cylindre parabolique avec le plan de l'infini. On pourrait appeler ces cycliques, cycliques paraboliques. M^r. Darboux les a appelées cartésiennes, car elles offrent une généralisation des ovales de Descartes.

Toute quadrique passant par une cartésienne est bi-tangente au cercle de l'infini ; c'est donc une surface de révolution ou un cylindre parabolique.

Toute cyclique peut être transformée en une cartésienne par inversion. Il suffit pour cela de faire en sorte qu'une focale devienne une cubique circulaire, c'est-à-dire de prendre le pôle d'inversion sur cette focale. Ainsi :

On transforme en une cartésienne la cyclique générale en prenant

le pôle d'inversion sur une focale de cette cyclique.

Qu'arrivera-t-il si l'on prend le pôle d'inversion V en un point de rencontre d'une focale avec la sphère qui contient la cyclique?

Puisque V est un foyer, les droites isotropes issues, sur la sphère, du point V touchent la cyclique. Les points circulaires à l'infini seront donc des points de rebroussement de la cyclique plane transformée, et réciproquement, cette position du point V est nécessaire pour que la cyclique plane ait deux rebroussements à l'infini.

Les foyers singuliers de cette cyclique coïncident donc, et l'on reconnaît de la sorte que toutes les quatre déférentes sont des cercles concentriques puisque les foyers singuliers sont les foyers des déférentes

Les cycliques ainsi obtenues sont les célèbres ovales de Descartes qui apparaissent ainsi comme un cas particulier de ces cycliques appelées cartésiennes par Mr Darboux.

Les cartésiennes résultent évidemment de la rencontre d'un cône de révolution, ou d'un cylindre parabolique, indifféremment avec une sphère. A part cela, elles peuvent présenter les mêmes singularités, point double ou de rebroussement à distance finie, que les cycliques ordinaires. C'est du reste à celles-ci qu'on peut toujours les ramener par inversion.

Représentation analytique des cycliques planes.

Je compléterai l'étude géométrique qui précède par la discussion de l'équation générale des cycliques planes, ou plutôt par l'indication rapide des résultats de cette discussion.

Soit

$$f(u, v, w) = A u^2 + A' v^2 + A'' w^2 + 2B\, v w + 2B' w u + 4B'' u v = 0$$

l'équation tangentielle de la déférente,

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + 2\delta = 0$$

le cercle directeur; L'équation finie de la cyclique sera:

$$f\left(x-\alpha, y-\beta, \delta - \frac{x^2+y^2}{2}\right) = 0$$

ou

$$A''(x^2+y^2)^2 - 4(B'x+By)(x^2+y^2) + \theta(x,y) = 0,$$

où θ est le premier membre de l'équation d'une conique.

On reconnait ainsi que si A'' n'est pas nul (déférente à centre unique) la cyclique est du 4ème ordre. Elle est du troisième si $A''=0$; déférente parabolique. Nous avons déjà démontré cela.

Cycliques du 4ème degré.

Si la déférente a un centre, on peut ramener l'équation tangentielle à la forme

$$Au^2 + A'v^2 - w^2 = 0,$$

et l'équation finie de la cyclique s'écrit alors:

$$(x^2+y^2)^2 - 4(A+\delta)x^2 - 4(A'+\delta)y^2 + 8A\alpha x + 8A'\beta y + 4(\delta^2 - A\alpha^2 - A'\beta^2) = 0.$$

Maintenant, toute quartique bi-circulaire a une équation de forme

$$(x^2+y^2)^2 - 4(x^2+y^2)(ax+by) + \lambda(x,y) = 0,$$

où $\lambda(x,y)$ est le premier membre de l'équation d'une conique. On peut écrire cette équation

$$[(x-a)^2 + (y-b)^2]^2 + \lambda_1(x,y) = 0,$$

en désignant encore par λ, un polynôme en x, y du second degré, et, si l'on transporte l'origine au point (a,b) il vient,

$$(x^2+y^2)^2 + \lambda_2(x,y) = 0,$$

où λ_2 est encore le premier membre de l'équation d'une conique. On fera disparaître le terme en xy dans $\lambda_2(x,y)$ par une rotation des axes, et les axes de coordonnées ainsi bien définis, nous aurons

$$(x^2+y^2)^2 - 4Lx^2 - 4L'y^2 + 8Mx + 8M'y + 4P = 0.$$

La cyclique ne peut recevoir cette forme que d'une manière, sauf le cas exceptionnel où l'on aurait $L' = L$, car alors une rotation arbitraire des axes conserve la forme ci-dessus. Mais je réserve ce cas.

On peut identifier avec l'équation trouvée pour l'anallagmatique

et il vient

$$A = L - \delta, \quad A' = L' - \delta'$$
$$(L - \delta).\alpha = M, \quad (L' - \delta)\,\beta = M'$$
$$P = \delta^2 - A\alpha^2 - A'\beta^2 .$$

On a donc A, A', α, β exprimés en fonction de δ, et la dernière équation donne ensuite pour δ,

$$P - \delta^2 + \frac{M^2}{L - \delta} + \frac{M'^2}{L' - \delta} = f(\delta) = 0,$$

équation du 4ème degré en δ qui fournit les quatre anallagmaties de la courbe.

J'engage le lecteur à démontrer directement, sur l'équation

1°. – Que les quatre cercles directeurs sont orthogonaux.

2°. – Que les quatre déférentes sont homofocales. Ce qui est évident d'après les valeurs de A, A'.

3°. – Que si l'on envisage un cercle et la déférente correspondante leur triangle conjugué commun a pour sommets les centres des trois autres cercles directeurs. Voici du reste l'indication de ce dernier calcul.

Soit le cercle directeur

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + 2\delta = 0,$$

et la déférente

$$\frac{x^2}{L - \delta} + \frac{y^2}{L' - \delta} - 1 = 0;$$

Soit (α', β') un point ayant même polaire dans les deux courbes. On aura en exprimant ce fait :

$$\frac{\alpha' - \alpha}{\frac{\alpha'}{L - \delta}} = \frac{\beta' - \beta}{\frac{\beta'}{L' - \delta}} = -2\delta + \alpha\alpha' + \beta\beta'.$$

j'introduis une variable auxiliaire δ', en appelant $\delta' - \delta$ la valeur commune de ces rapports. On a donc

$$-\delta - \delta' + \alpha\alpha' + \beta\beta' = 0,$$

avec

$$\frac{\alpha' - \alpha}{\frac{\alpha'}{L - \delta}} = \frac{\beta' - \beta}{\frac{\beta'}{L' - \delta}} = \delta' - \delta$$

c'est-à-dire

$$\alpha'(L-\delta') = \alpha(L-\delta) = M, \beta'(L'-\delta') = \beta(L'-\delta) = M'$$

d'où

$$\alpha' = \frac{M}{L-\delta'}, \beta' = \frac{M}{L'-\delta'}$$

et enfin, eu égard à la relation $-\delta-\delta'+\alpha\alpha'+\beta\beta' = 0$,

$$-\delta-\delta'+\frac{M^2}{(L-\delta)(L-\delta')}+\frac{M'^2}{(L'-\delta)(L'-\delta')} = 0,$$

ce qui s'écrit

$$\frac{f(\delta)-f(\delta')}{\delta-\delta'} = 0;$$

et comme $f(\delta) = 0$, il reste

$$f(\delta') = 0.$$

Si l'on a égard aux valeurs de α', β', on voit bien que ces quantités sont les coordonnées du centre de l'un des trois autres cercles directeurs.

Le théorème est donc démontré.

La discussion repose sur quelques théorèmes faciles à démontrer.

Théorème I. Si l'une des quantités M, M' est nulle la cyclique perd une anallagmatie et gagne une symétrie.

Qu'une symétrie survienne cela est évident sur l'équation; qu'une anallagmatie soit perdue, cela tient à ce que l'équation $f(\delta) = 0$ se réduit à

$$P-\delta^2+\frac{M'^2}{L'-\delta} = 0.$$

On voit que si $M = M' = 0$, il y a deux anallagmaties perdues, et deux axes de symétrie sont acquis.

Théorème II. — Si $f(\delta) = 0$ a une racine double[1] autre que L ou L', la cyclique a un point double.

En effet, le carré du rayon du cercle directeur (α, β, δ) a pour valeur

$$-2\delta+\alpha^2+\beta^2 = -2\delta+\frac{M^2}{(L-\delta)^2}+\frac{M'^2}{(L'-\delta)^2} = f'(\delta),$$

ce rayon est donc nul avec $f'(\delta)$. Le rayon d'un des cercles directeurs étant nul, la cyclique possède une anallagmatie exceptionnelle et nous savons que, dans ce cas la cyclique a un point double.

---

[1] Le lecteur prouvera que L, L' ne peuvent être racine double que si la courbe se décompose en deux cercles.

Les coordonnées du point double sont

$$\alpha = \frac{M}{L-\delta}, \quad \beta = \frac{M'}{L'-\delta}.$$

Théorème III. — Si $f(\delta) = 0$ a une racine triple autre que L ou L', la cyclique a un rebroussement.

En effet, dans le théorème précédent la cyclique est la podaire par rapport au point O_1 $\left(\alpha = \frac{M}{L-\delta}, \beta = \frac{M'}{L'-\delta}\right)$ de la conique D'_1 homothétique de D_1 (pôle O_1, module 2), et D_1 est la déférente exceptionnelle.

$$\frac{x^2}{L-\delta} + \frac{y^2}{L'-\delta} - 1 = 0$$

substituons dans le premier membre les coordonnées α, β, il viendra

$$-1 + \frac{\alpha^2}{L-\delta} + \frac{\beta^2}{L'-\delta} = -1 + \frac{M^2}{(L-\delta)^3} + \frac{M}{(L'-\delta)^3} = \frac{1}{2} f''(\delta)$$

Donc, $f''(\delta) = 0$ est la condition nécessaire et suffisante pour que O_1 soit sur D_1 et, par suite sur D'_1. Or si O_1 est sur D'_1 la podaire a en O_1 un rebroussement.

Théorème IV. — Si $L' = L$, la cyclique est un ovale de Descartes.

En effet, les déférentes sont alors des cercles concentriques. L'équation $f(\delta) = 0$ s'écrit alors

$$P - \delta^2 + \frac{M^2 + M'^2}{L-\delta} = 0;$$

D'ailleurs, par une rotation des axes on peut ramener l'équation de la cyclique à la forme

$$(x^2+y^2)^2 - 4L(x^2+y^2) + 8M'y + 4P = 0.$$

et l'équation en δ devient

$$P - \delta^2 + \frac{M'^2}{L-\delta} = 0,$$

il est impossible que M' soit nul sans que la cyclique se décompose en deux cercles concentriques. Ce cas exclus, on voit qu'il reste une équation en δ du 3ème degré.

Cette équation en δ pourra avoir une racine double (podaire de cercle) ou triple (podaire de cercle par rapport à l'un de ses points).

Il est aisé d'après cela de dresser le tableau des diverses sortes de cycliques planes du 4ème ordre en les rattachant à leur équation

supposée donnée.

1er Genre — Pas de point double (quatre espèces)

1ère Espèce. — Le cas général ; on associe à une déférente à centre un cercle directeur quelconque.

2ème Espèce. — Un axe de symétrie. Le cercle directeur a son centre sur un axe de l'une des déférentes. Caractère $M=0$ ou $M'=0$. Trois anallagmaties.

3ème Espèce. — Deux symétries. Deux anallagmaties avec le cercle directeur concentrique à la conique déférente.

4ème Espèce. — Courbe à déférentes circulaires ; trois anallagmaties. Une symétrie. Ovales de Descartes. Caractère $L=L'$.

2ème Genre — Un point double (Quatre espèces).

1ère Espèce. — Cyclique à anallagmatie double (exceptionnelle) deux autres anallagmaties dans lesquelles le cercle directeur touche la conique déférente en un point (le point double) Podaire et inverse de conique. Caractère : Une racine double pour $q(\delta)=0$.

2ème Espèce. — Cyclique à anallagmatie double et à symétrie ; c'est le cas précédent, mais dans l'anallagmatie unique qui subsiste, le cercle directeur touche la déférente en un sommet. Podaire de conique et inverse de conique par rapport à un point d'un axe. Caractère : racine double de $q(\delta)$ et M ou M' nul.

3ème Espèce — Cyclique à point double et à deux symétries. Une anallagmatie double (singulière) Plus d'anallagmatie simple. Podaires et inverses de coniques par rapport à leurs centres. Caractère : $M=M'=P=0$.

4ème Espèce. — Cyclique à point double et à déférente circulaire. Une symétrie ; une anallagmatie double ; une autre simple, dans laquelle le cercle directeur touche le cercle déférent. Podaire de cercle : inverse de conique

à centre par rapport à un de ses foyers. Ovale de Descartes à point double. Limaçon de Pascal Caractère: $L = L'$ et une racine double.

3ème Genre. — (Cycliques à rebroussement) (trois espèces)

1ère Espèce. — Cyclique à rebroussement. Une anallagmatie triple. Une simple dans laquelle le cercle directeur oscule la conique déférente. Podaire de conique par rapport à un de ses points. Inverse de parabole. Caractère: Une racine triple.

2ème Espèce. — Cyclique à rebroussement et à symétrie. Pas d'anallagmatie. Podaire de conique par rapport à un de ses sommets; inverse de parabole par rapport à un point d'un axe.
Caractère: Racine triple et M ou M' nul.

3ème Espèce. — Cyclique à rebroussement, podaire de cercle par rapport à un de ses points. Inverse de parabole par rapport à un foyer. Ovale à rebroussement. Caractère: $L = L'$ et une racine triple.

Cycliques cubiques.

La discussion se fait pour les cycliques cubiques comme pour les quartiques. Une cyclique cubique a un foyer singulier, rencontre de ses asymptotes isotropes; elle a de plus une asymptote réelle prenons pour origine des coordonnées le foyer singulier, et pour oy une parallèle à l'asymptote réelle. Celle-ci sera représentée par une équation

$$x - b = 0,$$

en sorte que les trois asymptotes de la courbe seront dans leur ensemble.

$$(x^2 + y^2)(x - b) = 0.$$

On sait que si P, P_1, P_2 sont les asymptotes d'une cubique plane, l'équation de la courbe s'écrit

$$P P_1 P_2 + P_3 = 0,$$

où P_3 est une droite. Ici donc l'équation de notre cubique circulaire sera $(x^2+y^2)(x-b) - 2Lx - 2L'y + M = 0.$

Telle est la forme réduite de l'équation de toute cubique circulaire, forme qui ne peut être obtenue qu'avec des axes parfaitement déterminés.

Cherchons à identifier avec une cyclique à déférente parabolique.

Une parabole ayant O pour foyer et ox pour axe est représentée par l'équation tangentielle

$$u^2 + v^2 - 2\frac{uw}{p} = 0;$$

si on la prend comme déférente, avec le cercle directeur (α, β, δ), on trouve pour l'anallagmatique correspondante l'équation

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - \frac{2}{p}(x-\alpha)\left(\delta - \frac{x^2+y^2}{2}\right) = 0.$$

ou encore,

$$(x^2+y^2)(x+p-\alpha) - 2(p\alpha+\delta)x - 2p\beta y + p(\alpha^2+\beta^2) + 2\alpha\delta = 0.$$

Nous obtenons ainsi une cubique circulaire; comme nous le savions d'avance.

Je ferai observer que le point $\alpha\beta$ est sur la cubique et que la tangente en ce point est justement parallèle à l'asymptote réelle.

Ceci étant, l'identification s'opère sans difficulté, en posant.

$$p - \alpha = -b, \quad p\alpha + \delta = L, \quad p\beta = L'$$

$$P = p(\alpha^2+\beta^2) + 2\alpha\delta.$$

Dans ces formules, p, α, β, δ sont les inconnues. On peut les exprimer toutes en fonction de p,

$$\alpha = b + p, \qquad \delta = L - p\alpha = L - p(b+p), \quad \beta = \frac{L'}{p},$$

et p est alors racine de

$$f(p) = -P + 2(b+p)\left\{L - bp - p^2\right\} + p(b+p)^2 + \frac{L'^2}{p} = 0,$$

ou en réduisant,

$$f'(p) = -P + 2L(b+p) - p(b+p)^2 + \frac{L'^2}{p} = 0.$$

Cette équation du 4ème degré fournira les quatre anallagmati de la courbe.

Ici encore une racine double indique un point double, cen d'un cercle directeur de rayon nul ; il y a une anallagmatie exceptionn la cyclique est une podaire de parabole et l'inverse d'une conique ac par rapport à un de ses points ; il reste deux anallagmaties, dans le quelles le cercle directeur touche la parabole déférente. Une racine tr indique un point de rebroussement, centre d'un cercle directeur de ray nul ; il y a une anallagmatie exceptionnelle ; la cyclique est la p daire d'une parabole par rapport à l'un de ses points et l'inver d'une autre parabole par rapport à l'un de ses points. Il n'y a pl qu'une anallagmatie dans laquelle le cercle directeur oscule la p rabole déférente.

Enfin, $4' = 0$ indique que ox est axe de symétrie. La cubique admet un point d'inflexion réel à l'infini.

Si l'on se souvient que les pôles d'anallagmatie de cyclique cubique sont des points de la courbe dont la tangen est parallèle à l'asymptote réelle, on voit que l'on peut ajoute que tout point qui possède cette propriété est effectivement un pôle d'anallagmatie.

Appelons en effet I le point réel à l'infini

En l'absence de point double on peut mener de I quat tangentes à la cubique, dont les points de contact sont d de I. Ces quatre points seront précisément les 4 pôles d'ana matie que possède la courbe.

Si $L' = 0$, I est un point d'inflexion ; on ne peut mene trois tangentes de I à la cubique, mais aussi il n'y a plus trois anallagmaties.

S'il y a un point double, il y en a deux de moins du

chaque cas, et en effet, on ne peut mener de I à la cubique que deux, ou même qu'une seule tangente suivant que I n'est pas ou est un point d'inflexion.

Enfin, dans le cas du rebroussement, on ne peut plus mener de I qu'une tangente et d'autre part, il n'y a qu'une anallagmatie. Encore cette tangente et cette anallagmatie disparaissent - elles si $L'=0$ c'est-à-dire si I est un point d'inflexion. On peut donc énoncer ce théorème.

Les pôles d'anallagmatie d'une cyclique cubique sont exactement les points de contact de la courbe avec ses tangentes parallèles à son asymptote réelle.

L'énumeration précédente nous montre assez qu'il y a trois types de cubiques circulaires

1er Genre (Sans point double (2 espèces)

1. — Cas général. Un cercle directeur et une parabole déférente quelconque

2. — $L'=0$; axe de symétrie; trois anallagmaties dans lesquelles le cercle directeur a son centre sur l'axe de la parabole déférente.

2ème Genre Un point double (2 espèces)

1. — Podaire de parabole; inverse de conique à centre par rapport à un de ses points. Une anallagmatie exceptionnelle; deux anallagmaties dans lesquelles le cercle directeur touche la parabole déférente. Caractère: racine double.

2. — La même chose, mais en plus $L=0$. Cubique circulaire à point double et à symétrie. Une anallagmatie exceptionnelle et une autre anallagmatie dans laquelle le cercle directeur touche la parabole déférente en son sommet.

3ème Genre. Un point de rebroussement (2 espèces)

1. — Podaire de parabole par rapport à un de ses points; inverse de parabole par rapport à un de ses points. Une anallagmatie exceptionnelle et une autre dans laquelle le cercle directeur oscule la déférente Racine triple.

2. — La même chose; mais en plus $L'=0$. Cubique circulaire à rebroussement et à symétrie. Anallagmatie exceptionnelle; pas d'autre anallagmatie.

Podaire de parabole par rapport à son sommet; Inverse de parabole par rapport à son sommet.

Les courbes du 3ème genre ont reçu le nom de cissoïde oblique et cissoïde droite. Au second genre appartiennent les strophoïdes droites ou obliques. Une strophoïde est une cubique circulaire à point double, avec tangentes rectangulaires en ce point. Une strophoïde est donc l'inverse d'une hyperbole équilatère par rapport à l'un de ses points, ou la podaire d'une parabole par rapport à un point de sa directrice.

Surfaces Cyclides.

Les surfaces enveloppes des sphères d'un système du second degré, orthogonales à une sphère fixe ont été appelées cyclides par M.G. Darboux. Ainsi que nous l'avons déjà dit, il y a deux cas à distinguer selon que les sphères dépendent de un ou de deux paramètres. Dans le premier cas, chaque sphère enveloppée touche la surface le long d'une ligne de courbure circulaire; dans le second, le contact n'a lieu qu'en deux points.

Si la sphère directrice ne se réduit pas à un plan, le lieu des centres des sphères enveloppées est une courbe dans le premier cas, une surface dans le second (courbe ou surface déférente).

Dans les cyclides, la déférente est une courbe ou une surface du second degré. En effet: supposons, par exemple, qu'il s'agisse de sphères à deux paramètres, orthogonales à la sphère directrice Σ et formant un système du second ordre. D'après la définition même de l'ordre d'un tel système, (page 128) l'ordre est égal au nombre n des sphères du système qui font partie de deux systèmes linéaires arbitraires, c'est à-dire, qui sont orthogonales à deux sphères arbitraires Σ_1, Σ_2. Les sphères orthogonales à Σ, Σ_1, Σ_2 ont leurs centres sur une droite Δ, et celles de ces sphères, en nombre n, qui font partie du système ont leurs centres aux points où la droite Δ perce la surface déférente. On voit ainsi que n est le degré de cette surface. Pour $n = 2$ la déférente est donc une

quadrique. La démonstration est la même si les sphères dépendent d'un seul paramètre. La déférente est une conique. On peut du reste le voir autrement en se reportant aux pages 128, 129 et remarquant que les traces des sphères du système sur la sphère directrice Σ sont des cercles d'un système du second degré à un paramètre, qui enveloppent par conséquent sur Σ une cyclique sphérique.

Le cas d'une déférente superficielle et celui d'une déférente curviligne ne sont pas essentiellement distincts, en ce sens que la déférente n'intervient dans les deux cas, que par son équation tangentielle (voir les pages 118, 119, 120). Nous pouvons donc comprendre les deux cas dans une même analyse en prenant comme point de départ cette équation tangentielle.

Soit donc.

$$A\xi^2+A'\eta^2+A''\zeta^2+2B\zeta\eta+2B'\xi\zeta+2B''\eta\xi$$
$$+2C\xi\tau+2C'\eta\tau+2C''\zeta\tau+D\tau^2=F(\xi,\eta,\zeta,\tau)=0$$

la condition de contact du plan.

$$\xi x+\eta y+\zeta z+\tau=0$$

avec la déférente. Pour que la déférente se réduise à une courbe, il faut et il suffit que le discriminant de la forme F soit nul (voir le chapitre sur les quadriques en coordonnées tangentielles p. 34). On doit exclure toutefois le cas où les mineurs de ce discriminant seraient nuls car alors la déférente se réduirait à deux points, et l'anallagmatique se décomposerait en deux sphères ayant respectivement pour centres ces points.

Soit $x^2+y^2+z^2-2\alpha x-2\beta y-2\gamma z+2\delta=0$

l'équation de la sphère directrice Σ. L'équation de la surface cyclide s'écrira (pages 118 et 120),

$$F\left(x-\alpha,\ y-\beta,\ z-\gamma,\ \delta-\frac{x^2+y^2+z^2}{2}\right)=0.$$

c'est à dire,

$$D\left(\delta-\frac{x^2+y^2+z^2}{2}\right)^2+2\left[C(x-\alpha)+C'(y-\beta)+C''(z-\gamma)\right]\left(\delta-\frac{x^2+y^2+z^2}{2}\right)$$
$$+A(x-\alpha)^2+A'(y-\beta)^2+A''(z-\gamma)^2+2B(y-\beta)(z-\gamma)$$
$$+2B'(z-\gamma)(x-\alpha)+2B''(x-\alpha)(y-\beta)=0.$$

Développée, cette équation a la forme

$$D(x^2+y^2+z^2)^2 - 4(Cx+C'y+C''z)(x^2+y^2+z^2) + \varphi(x,y,z) = 0,$$

où φ est un polynôme en x, y, z du second degré. Rendons cette équation homogène et posons

$$\Phi(x,y,z,t) = D(x^2+y^2+z^2)^2 - 4(Cx+C'y+C''z)(x^2+y^2+z^2)t + t^2\varphi_1(x,y,z,t)$$

où $\varphi_1(x,y,z,t)$ est le polynome $\varphi(x,y,z)$ rendu homogène. Nous tirons de là

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = 4D(x^2+y^2+z^2)x - 4t\psi_1$$
$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = 4D(x^2+y^2+z^2)y - 4t\psi_2$$
$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = 4D(x^2+y^2+z^2)z - 4t\psi_3$$
$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = -4(Cx+C'y+C''z)(x^2+y^2+z^2) + t\psi_4$$

où $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ sont des polynômes homogènes du 2ème degré en x,y,z,t. Pour tous les points du cercle de l'infini on a

$$t = 0, \qquad x^2+y^2+z^2 = 0,$$

et on en conclut, $\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{\partial\Phi}{\partial y} = \frac{\partial\Phi}{\partial z} = \frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0$; cela prouve que les points du cercle de l'infini sont tous des points doubles de la surface, ou que ce cercle est une courbe double de la surface.

Nous tombons donc si D n'est pas nul sur une surface du quatrième ordre bi-circulaire.

Si, au contraire, D est nul, auquel cas le plan de l'infini touche la déférente (paraboloïde ou parabole) on voit que la surface se réduit à

$$4(Cx+C'y+C''z)(x^2+y^2+z^2) + t\varphi(x,y,z,t) = 0,$$

elle est seulement du troisième ordre. Le plan de l'infini la coupe suivant le cercle de l'infini ($x^2+y^2+z^2=0$) et suivant une droite ($cx+c'y+c''z=0$). Nous avons une surface cubique circulaire.

Nous prouverons plus loin que, réciproquement, toute surface du 4ème ordre bi-circulaire, toute surface cubique circulaire, sont des surfaces cyclides. Les quadriques doivent aussi être considérées comme des cyclides.

nous pouvons le montrer immédiatement. Soit la quadrique

$$z^2 = mx^2 + ny^2 + 2px + 2qy + r$$

et considérons les sphères bi-tangentes dont le centre est dans le plan principal $z = 0$ de la surface,

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y + 2\delta = 0.$$

Si on élimine z^2 entre l'équation de la surface et celle de la sphère on trouve

$$(1+m)x^2 + (1+n)y^2 + 2(p-\alpha)x + 2(q-\beta)y + r + 2\delta = 0;$$

la condition du double contact s'exprime en écrivant que le discriminant de cette équation est nul, ce qui donne

$$(1+m)(1+n)(r+2\delta) - (1+m)(p-\alpha)^2 - (1+n)(q-\beta)^2 = 0,$$

équation du second degré entre les coordonnées de la sphère.

Les sphères bi-tangentes à une quadrique sont donc orthogonales à l'un des plans principaux et forment une famille du second ordre, elles rentrent donc bien dans la définition des cyclides.

Il est clair que si l'on effectue une inversion, une cyclide a pour transformée une cyclide, car un système du second ordre de sphères orthogonales à une sphère fixe se transforme par inversion en un système analogue.

En particulier les surfaces inverses des quadriques sont des cyclides. Ce ne sont pas, comme nous le verrons, les cyclides les plus générales que l'on obtient ainsi; mais si l'on fait abstraction du cas général, les cyclides réciproques de quadriques renferment tous les autres genres de cyclides. C'est pourquoi nous allons faire une étude préliminaire de ces cyclides. Mais auparavant je démontrerai le théorème suivant :

Toute sphère bi-tangente à une cyclide fait partie d'un mode de génération anallagmatique de la surface.

Soit une cyclide du 4ème ou du 3ème ordre, peu importe. Une sphère la coupe suivant le cercle de l'infini, compté deux fois pour une cyclide du 4ème ordre et une fois pour une cyclide du troisième ordre; dans les deux cas, l'intersection résiduelle est du quatrième ordre; c'est

donc une cyclique. On a donc déjà ce théorème.

Toute surface cyclide est coupée par une sphère suivant une cyclique.

Si la sphère est bi-tangente, la cyclique se compose de deux cercles A_0, B_0, car une cyclique ne peut avoir deux points doubles sans se décomposer.

Considérons une sphère arbitraire menée par le cercle A_0, elle coupe la cyclique suivant un second cercle B; de même une sphère arbitraire mené par le cercle B_0 coupe la cyclique suivant un cercle A. Je dis que les cercles A et B sont sur une même sphère S. En effet, soit la cyclide

$$D\Omega^2 + P\Omega + Q = 0.$$

où D est une constante (nulle si la surface est cubique), $\Omega = x^2+y^2+z^2$, P est un polynôme du premier degré en x, y, z et Q le premier membre de l'équation d'une quadrique. Je coupe la cyclide par la sphère.

$$S_0 = \Omega - V_0 = 0,$$

où V_0 est une fonction linéaire en x, y, z. Je remplace Ω par V_0 dans l'équation de la cyclide et j'obtiens

$$DV_0^2 + PV_0 + Q = 0,$$

équation d'une quadrique qui coupe la sphère S_0 suivant la même cyclique que la cyclide. Puisque ici cette cyclique se décompose en deux cercles, on pourra écrire:

$$DV_0^2 + PV_0 + Q + \rho(\Omega - V_0) = A_0 B_0,$$

en représentant par $A_0 = 0$ le plan du cercle A_0 et par $B_0 = 0$ le plan du cercle B_0.

Coupons maintenant la cyclide par la sphère

$$\Omega - V_0 - \lambda B_0 = 0$$

qui passe par le cercle B_0, nous aurons la quadrique

$$D(V_0 + \lambda B_0)^2 + P(V_0 + \lambda B_0) + Q = 0,$$

qui doit être coupée par cette sphère suivant le cercle B_0 et suivant un cercle A contenu dans un plan $A = 0$. Il est aisé de trouver A. En effet en multipliant par ρ l'équation de la sphère et l'ajoutant

à celle de la quadrique, il vient

$$D(V_0+\lambda B_0)^2+P(V_0+\lambda B_0)+Q+\rho(\Omega-V_0-\lambda B_0)$$
$$= DV_0^2+PV_0+Q+\rho(\Omega-V_0)+B_0\{-\rho\lambda+D\lambda^2B_0+2D\lambda V_0+\lambda P\}$$

et comme on a

$$DV_0^2+PV_0+Q+\rho(\Omega-V_0)=A_0B_0,$$

il en résulte

$$D(V_0+\lambda B_0)^2+P(V_0+\lambda B_0)+Q+\rho(\Omega-V_0-\lambda B_0)$$
$$=B_0\{A_0-\rho\lambda+D\lambda^2B_0+2D\lambda V_0+\lambda P\}.$$

Le plan $A=0$ est donc le suivant,

$$A=A_0-\rho\lambda+D\lambda^2B_0+\lambda(2DV_0+P)$$

Le même calcul appliqué à la sphère

$$\Omega-V_0+\mu A_0=0$$

menée par le cercle A_0 montre que cette sphère coupe la cyclide suivant le cercle A_0 et suivant un cercle B contenu dans le plan

$$B=B_0-\rho\mu+D\mu^2A_0+\mu(2DV_0+P).$$

Il faut prouver que les cercles

$$A=0 \qquad \Omega-V_0+\lambda B_0=0 \quad \text{(cercle A)}$$

et

$$B=0 \qquad \Omega-V_0+\mu A_0=0 \quad \text{(cercle B)}$$

sont sur une même sphère S.

On vérifie en effet que la sphère

$$S=\Omega-V_0+\frac{\mu A_0+\lambda B_0+\lambda\mu(2DV_0+P-\rho)}{D\lambda\mu-1}=0$$

contient ces deux cercles.

Ainsi : lorsqu'une sphère $\Omega-V_0=0$ est bi-tangente à une cyclide, elle fait partie d'un système de sphères à deux paramètres bi-tangentes à la cyclide.

Posons

$$V_0=2lx+2my+2nz+p$$
$$A_0=2l'x+2m'y+2n'z+p'$$
$$B_0=2l''x+2m''y+2n''z+p''$$
$$P=2l'''x+2m'''y+2n'''z+p'''$$

les coordonnées du centre de la sphère S seront

$$\alpha = l - \frac{l'\mu + l''\lambda + (2Dl + l''')\lambda\mu}{D\lambda\mu - 1}$$

$$\beta = m - \frac{m'\mu + m''\lambda + (2Dm + m''')\lambda\mu}{D\lambda\mu - 1}$$

$$\gamma = n - \frac{n'\mu + n''\lambda + (2Dn + n''')\lambda\mu}{D\lambda\mu - 1}$$

et la puissance 2δ de l'origine par rapport à S est

$$2\delta = -p + \frac{p'\mu + p''\lambda + (2Dp + p''')\lambda\mu}{D\lambda\mu - 1}$$

Les coordonnées $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ de la sphère S sont donc des fonctions linéaires des trois quantités λ, μ et $\lambda\mu$. On peut donc affirmer que ces coordonnées $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont liées par une relation linéaire et par une relation de second degré. Les sphères S constituent donc une génération anallagmatique de la cyclide.

Remarque : La démonstration s'applique à toute surface représentée par une équation de la forme

$$D\Omega^2 + \Omega P + Q = 0.$$

Il suffit de connaître un cercle A_0 de cette surface pour en déduire aussitôt une génération anallagmatique. Il suffit donc de savoir qu'il existe un cercle sur la surface

$$D\Omega^2 + \Omega P + Q = 0$$

pour être autorisé à dire que cette surface est anallagmatique.

Or on peut prouver aisément que sur toute surface de la forme ci-dessous il y a toujours un cercle.

Je n'irai pas plus loin dans cet ordre d'idées, car il résultera clairement de la discussion ultérieure que toute surface quartique bicirculaire et toute surface cubique circulaire sont des anallagmatiques. Il était cependant intéressant de montrer que la connaissance d'un seul cercle A_0 d'une anallagmatique suffit pour en déterminer une infinité d'autres B et A situés sur des sphères d'une génération anallagmatique de la surface.

Les Inverses ou Podaires de quadriques.

Nous avons déjà reconnu que toute inverse de quadrique est une cyclide.

Si l'on considère la quadrique

$$px^2+qy^2+rz^2-2lx-2my-2nz+h=0$$

rapportée à des parallèles à ses axes issues du pôle d'inversion, on trouve que la cyclide inverse a pour équation, K étant la puissance d'inversion

$$h(x^2+y^2+z^2)^2-2K(lx+my+nz)(x^2+y^2+z^2)$$
$$+K^2(px^2+qy^2+rz^2)=0.$$

Prenons réciproquement la cyclide

$$D(x^2+y^2+z^2)^2-4(Cx+C'y+C''z)(x^2+y^2+z^2)+\varphi(x,y,z)=0,$$

dont nous avons déjà obtenu l'équation, et supposons que cette cyclide ait un point double. On peut supposer que l'origine est en ce point double et que les axes de coordonnées sont les axes du cône des tangentes en ce point double. Alors $\varphi(x,y,z)$ qui est un polynôme en x,y,z du second degré doit se réduire à la forme

$$px^2+qy^2+rz^2,$$

et l'équation de la cyclide revêt une forme identique à celle que nous avons trouvée pour notre inverse de quadrique.

$$D(x^2+y^2+z^2)^2-4(Cx+C'y+C''z)(x^2+y^2+z^2)+px^2+qy^2+rz^2=0.$$

Ainsi les cyclides à point double et les inverses de quadriques sont une seule et même chose.

Si l'on se reporte à l'équation de l'inverse de quadrique on reconnaît qu'elle est du 4ème ordre tant que h n'est pas nul, mais qu'elle s'abaisse au troisième, si le pôle d'inversion est sur la quadrique, c'est-à-dire si $h=0$.

Le cône des tangentes au point double est le cône asymptote de la surface; il se décompose en deux plans pour le cas d'un paraboloïde ou d'un cylindre à centres, et se réduit à un plan double dans le cas d'un cylindre parabolique.

La quadrique admet généralement trois plans de symétrie qui deviennent, par inversion, trois sphères d'anallagmatie de la cyclide.

Par contre, les plans tangents de la quadrique se transforment en des sphères menées par le pôle d'inversion et tangentes à la cyclide. J'ajoute que ces sphères forment un système du second degré. En effet, les plans tangents d'une quadrique sont des sphères de rayon infini, formant un système du second degré, leurs inverses sont donc des sphères formant un système du second degré. Nous avons déjà introduit cette manière de voir à propos des coniques.

Nous reconnaissons ainsi que les cyclides à point double présentent en général trois anallagmaties ordinaires, et en outre une génération anallagmatique exceptionnelle dans laquelle le rayon de la sphère directrice a un rayon nul.

On peut démontrer la réciproque :

Supposons une surface cyclide qui admette une génération anallagmatique exceptionnelle dans laquelle la sphère directrice a un rayon nul. Les sphères enveloppées passent toutes par le point double O_1, elles forment un système du second degré. Donc par une inversion de pôle O_1, elles se changeront en des plans formant un système du second degré c'est-à-dire, tangents à une quadrique. Cette quadrique, enveloppe de ces plans, sera l'inverse de la cyclide enveloppe des sphères inverses.

On verra plus loin combien ces remarques simplifient la discussion générale.

Considérons encore une cyclide à point double O_1, elle est l'enveloppe d'une famille de sphères du second degré passant toutes au point O_1. Soit Γ une de ces sphères et M le point où elle touche la cyclide, le second point coïncide évidemment avec le point O_1 et, d'après les résultats généraux de la page 116, le plan mené par le milieu de $O_1 M$ perpendiculairement à $O_1 M$ touche la déférente au centre de la sphère Γ; ceci ayant lieu en toute hypothèse, soit que cette déférente soit une courbe, soit qu'elle soit une surface. Appelons D_1 cette déférente et Γ la transformée homothétique de D_1, en prenant O_1 comme pôle et 2

comme module d'homothétie. Le plan élevé en M perpendiculairement à $O_1 M$, sera évidemment tangent à D'_1. La cyclide apparait donc comme la podaire de la quadrique (tangentielle) D'_1 par rapport au point O_1, c'est-à-dire, comme le lieu des projections de O_1 sur tous les plans tangents à D'_1.

Soit Π l'un de ces plans tangents et M le pied de la perpendiculaire $O_1 M$ abaissée de O_1 sur ce plan ; transformons la cyclide par inversion en prenant O_1 comme pôle ; nous aurons l'inverse R du point M en prenant sur $O_1 M$ un point R tel que

$$O_1 M \cdot O_1 R = K = \text{puissance d'inversion.}$$

Mais alors R est le pôle du plan Π par rapport à la sphère de centre O_1 et de rayon $\sqrt{k}$ (celle qui définit l'inversion). L'inverse de la cyclide est donc la quadrique (ponctuelle) polaire réciproque par rapport à la sphère, de la quadrique (tangentielle) D'_1.

C'est à dessein que nous mettons entre parenthèses ces mots tangentielle ou ponctuelle. Une quadrique définie ponctuellement peut devenir un cône, mais jamais une conique ; une quadrique définie tangentiellement peut devenir une conique, jamais elle ne peut devenir un cône. Dans ce qui précède, la quadrique inverse de la cyclide peut être un cône ; alors les sphères de la génération exceptionnelle, transformées des plans tangents du cône, ne dépendent que d'un paramètre, leur déférente doit donc être une conique. Et en effet, cette déférente est la polaire réciproque du cône par rapport à une sphère de centre O_1, ce ne peut donc être qu'une conique.

Observons que les surfaces inverses de cônes du second degré, ou les podaires de coniques, possèdent deux points doubles ; l'un au pôle d'inversion, l'autre au point transformée du sommet du cône. Si l'on désigne par O_1, O_2 ces deux points doubles, toutes les sphères enveloppées, qui ne dépendent que d'un paramètre, passent par O_1, O_2, puisqu'elles sont les inverses des plans tangents du cône. La déférente plane D_1 est donc dans le plan mené par le milieu de $O_1 O_2$ perpendiculairement à cette droite. La conique D'_1 est donc dans le plan élevé en O_2 perpendiculairement

à O_1 O_2, ou encore, la cyclide étant définie par sa conique antipodaire D'_1 et par le pôle O_1, le second point double O_2 est la projection de O_1 sur le plan de la conique. Il est bien évident du reste que la cyclide est aussi la podaire par rapport aux points O_2 de la conique D''_1 homothétique de D_1, O_2 étant le pôle d'homothétie et 2 le module d'homothétie. Il suffit, pour le voir, de remarquer que, par une inversion de pôle O_2 la cyclide devient un cône.

On observera que si le cône devient un cylindre le point O_2 vient se confondre avec le point O_1 qui se trouve ainsi être dans le plan même de la conique D_1; la conique D'_1 est aussi dans ce plan et la cyclide est la podaire d'une conique par rapport à un point de son plan.

Sans pousser plus loin cette discussion, nous passerons à un autre problème qui se présente ici naturellement. Les inverses de cônes ou de cylindres sont des cyclides à déférente curviligne. Est-ce le seul cas?

Supposons qu'une cyclide soit l'enveloppe d'une sphère S orthogonale à une sphère fixe Σ, et dont le centre décrit une conique D_1. Toutes ces sphères S sont orthogonales à la sphère Σ, et au plan Δ qui contient D_1; elles sont donc orthogonales à toutes les sphères Σ menées par le cercle Θ_1 d'intersection de Σ, avec le plan Δ. On sait en effet que toutes les sphères orthogonales à deux sphères d'un faisceau sont orthogonales à toutes les sphères du faisceau. En particulier, elles sont orthogonales aux deux sphères de rayon nul que l'on peut mener par ce cercle, ce qui veut dire qu'elles passent par les deux centres O_1, O_2 de ces sphères lesquels sont symétriques par rapport au plan Δ et sont sur la perpendiculaire élevée au cercle Θ_1 en son centre (axe du cercle Θ_1). Toutes nos sphères enveloppées passent donc par ces deux points fixes O_1, O_2. Je dis que ces points sont des points doubles de la cyclide, et qu'ils admettent comme cônes de tangentes les cônes supplémentaires des deux cônes qui ont O_1 O_2 comme sommets et D_1 pour base.

En effet, soit M un point de D_1 et S la sphère enveloppée qui a son centre en ω.

Cette sphère touche la cyclide suivant un cercle, que l'on obtient en la coupant par un plan mené par $O_1 O_2$ perpendiculairement à la tangente MT en M à la conique D_1. Appelons T le point où ce plan rencontre cette tangente. La droite TO_1 est un rayon du cercle de contact et la perpendiculaire $O_1 T'$ au plan $O_1 TM$ est la tangente à ce cercle en O_1. Du reste, le plan $O_1 TM$ touche le long de $O_1 M$ le cône de base D_1 et de sommet O_1; il en résulte que $O_1 T'$ est une génératrice du cône supplémentaire de ce cône. Ce cône supplémentaire est aussi le lieu des tangentes $O_1 T$ au point O_1 aux cercles de contact; c'est donc le cône des tangentes de la cyclide au point O_1. On voit ainsi non seulement que O_1 est un point double, mais encore quel est le cône des tangentes. De même pour O_2. Une inversion de pôle O_1 (ou O_2) transformera la cyclide en un cône.

Cependant, si O_1 et O_2 sont confondus, ce qui aura lieu si le cercle O_1 est de rayon nul, ils viennent se confondre avec le centre O_1 de ce cercle dans le plan Δ; tous les cercles de contact sont tangents à la normale en O_1 au plan Δ. C'est le cas où la cyclide est l'inverse d'un cylindre.

Il est ainsi établi que toute cyclide à déférente plane a deux points doubles qui (peuvent devenir infiniment voisins) et qu'elle est l'inverse d'un cône ou d'un cylindre.

Effectuons une inversion quelconque, notre cylindre à déférente plane va se transformer en une autre cyclide enveloppée par des sphères à un paramètre, et, par suite à déférente plane. Toutes les sphères S étaient orthogonales précédemment à toutes les sphères Σ menées par un certain cercle Θ_1; dans la cyclide transformée les sphères S'_1 transformées des sphères S_1 seront orthogonales à toutes les sphères Σ' menées par le cercle Θ'_1, transformé du cercle Θ.

Mais que le pôle d'inversion soit pris sur le cercle Θ_1 lui-même; alors Θ'_1 est une droite et les sphères Σ' ont leurs centres sur cette droite, la surface cyclide est donc devenue une surface de révolution; les sphères Σ' sont les plans méridiens de la surface.

Réciproquement, soit une cyclide de révolution, et appelons Θ_1' son axe, Σ' les plans méridiens, S' les sphères circonscrites suivant les parallèles. Ces sphères forment un système du second degré. Il suffit pour le montrer, de prouver que leurs traces T sur un plan méridien constituent une famille de cercles du second degré. Or en effet, tout plan coupe la cyclide suivant une cyclique; en particulier un plan méridien la coupe suivant une cyclique qui est évidemment symétrique par rapport à l'axe de révolution, et à laquelle les cercles T sont bi-tangents. Comme il n'y a pas d'autres cercles bi-tangents à une cyclique que ceux qui proviennent d'une génération anallagmatique il en résulte que la famille des cercles T est bien du second degré.

Effectuons alors une inversion quelconque. Les sphères S' vont se transformer en des sphères formant une famille du second degré, orthogonales au cercle Θ_1, transformée de l'axe de révolution Θ_1'; elles constitueront ainsi une génération anallagmatique à déférente plane de la cyclide. Celle-ci admettra comme points doubles les centres des sphères de rayon nul menées par Θ_1.

En particulier, l'inverse d'une quadrique de révolution sera une cyclide à trois points doubles, savoir: Un au pôle d'inversion, et deux autres, aux centres des sphères de rayon nul menées par le cercle qui est l'inverse de l'axe de révolution de la quadrique.

L'inverse d'un cône de révolution aura quatre points doubles, un au pôle d'inversion, un au point inverse du sommet du cône, et deux autres aux centres des sphères de rayon nul menées par le cercle qui est l'inverse de l'axe de révolution.

Les plans tangents au cône et les sphères inscrites dans le cône fournissent deux familles de sphères inscrites dans la cyclide. Celle-ci admet donc deux générations anallagmatiques à déférente plane, et ses deux familles de lignes de courbure sont circulaires. C'est la célèbre cyclide de Dupin.

On en obtient une variété en supposant que le cône de révolu-

devient un cylindre de révolution. C'est le cas où deux des points doubles coïncident

Il est clair que toute cyclide qui a deux déférentes curvilignes est l'inverse d'un cône ou d'un cylindre de révolution. En effet, on voit tout d'abord qu'elle a quatre points doubles, et, une inversion faite de l'un d'eux comme pôle change les sphères d'un des modes de génération dans les plans tangents d'un cône ou d'un cylindre. Les sphères inscrites du second système de génération deviennent des sphères inscrites dans le cône ou le cylindre, en sorte que cette quadrique inverse est de révolution.

Une démonstration analogue prouve que toute cyclide à trois points doubles est l'inverse d'une quadrique de révolution.

Les surfaces inverses de quadriques ponctuelles sont des podaires de quadriques tangentielles, il est donc intéressant de savoir quelle propriété des quadriques antipodaires correspond à l'hypothèse que la cyclide est l'inverse d'une quadrique de révolution. Considérons une cyclide inverse, par rapport à un pôle O, d'une quadrique Q de révolution. Cette quadrique Q est bi-tangente au cercle de l'infini par définition ; sa podaire réciproque D' par rapport à une sphère de centre O sera donc bi-tangente au cône qui est la polaire réciproque du cercle de l'infini par rapport à la sphère. Or le cône réciproque du cercle de l'infini par rapport à une sphère n'est autre évidemment que le cône asymptote de la sphère, c'est-à dire la sphère de rayon nul qui est concentrique à la sphère. Nous reconnaissons ainsi que la sphère de rayon nul de centre O est bi-tangente à la quadrique D' aussitôt que la quadrique Q est de révolution. Le point O est donc un point d'une focale de D'. De là ce théorème :

Une cyclide inverse d'une quadrique de révolution est la podaire d'une quadrique par rapport à un point d'une de ses focales

En particulier

La cyclide de Dupin (inverse d'un cône de révolution) est la podaire d'une conique par rapport à un point de l'une de ses focales.

Des Anallagmaties dans les Cyclides.

J'ai annoncé que je prouverais d'une manière détaillée que toute surface du 4ème ordre bi-circulaire, et toute surface cubique circulaire était une cyclide. La marche suivante que je vais indiquer rapidement pour le cas des surfaces du 4ème ordre bi-circulaires s'applique également aux surfaces cubiques circulaires.

Cherchons d'abord à mettre sous une forme simple l'équation des surfaces cyclides dont la déférente a un centre. Rapportons la déférente à son centre et à ses axes; son équation tangentielle sera

$$A\xi^2 + A'\eta^2 + A''\zeta^2 - \tau^2 = 0,$$

et $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ étant les coordonnées de la sphère directrice, nous avons pour la cyclide cette équation

$$A(x-\alpha)^2 + A'(y-\beta)^2 + A''(z-\gamma)^2 - \left(\delta - \frac{x^2+y^2+z^2}{2}\right)^2 = 0.$$

ou encore

$$(x^2+y^2+z^2)^2 - 4(A+\delta)x^2 - 4(A'+\delta)y^2 - 4(A''+\delta)z^2 + 8A\alpha x + 8A'\beta y + 8A''\gamma z + 4[\delta^2 - A\alpha^2 - A'\beta^2 - A''\gamma^2] = 0.$$

Je vais prouver que l'équation de toute surface du 4ème ordre bi-circulaire peut recevoir cette forme. L'équation de toute surface du 4ème ordre a la forme

$$\omega_4(x,y,z) + \omega_3(x,y,z)\,t + \omega_2(x,y,z)\,t^2 + \omega_1(x,y,z)\,t^3 + \omega_0 t^4 = 0$$

où ω_i est un polynôme homogène en x, y, z du degré i. La section par le plan de l'infini est représentée par $t=0$, $\omega_4(x,y,z)=0$; et comme ici cette section doit se composer exclusivement du cercle de l'infini il faut avoir:

$$\omega_4(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^2.$$

Posons donc :

$$\phi(x, y\ z, t) = \left(x^2+y^2+z^2\right)^2 + \omega_3(x, y, z)\,t + \omega_2(x\ y, z)\,t^2 + \omega_1(x, y, z)\,t^3 + \omega_0 t^4$$

et calculons les dérivées $\frac{\partial\phi}{\partial x}$, etc ..., nous aurons, en designant par $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ des polynômes homogènes du second degré

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = 4\left(x^2+y^2+z^2\right)x + t\,.\,\psi_1(x, y, z, t)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = 4\left(x^2+y^2+z^2\right)x + t\,.\,\psi_2$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = 4\left(x^2+y^2+z^2\right)x + t\,.\,\psi_3$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = \omega_3(x, y, z) + t\,.\,\psi_4$$

Si l'on fait $t=0$ $x^2+y^2+z^2=0$, c'est-à-dire si l'on prend un point sur le cercle de l'infini on a

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{\partial\phi}{\partial z} = 0$$

et puis,

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = \omega_3(x, y, z)$$

Pour que tout point du cercle de l'infini soit sur la surface un point double, il faut que $\frac{\partial\phi}{\partial t}$ soit aussi nul, et par suite $\omega_3(x, y, z)$ doit s'annuler en même temps que $x^2+y^2+z^2$: il faut en conséquence, que $x^2+y^2+z^2$ divise ω_3 ; posons donc

$$\omega_3 = -2(lx+my+nz)\left(x^2+y^2+z^2\right)$$

et il vient, pour équation de la surface du 4ième degré bicirculaire

$$\left(x^2+y^2+z^2\right)^2 - 2(lx+my+nz)\left(x^2+y^2+z^2\right) + \theta(x, y, z) = 0$$

où θ est un polynôme en $x, y\ z$ du second degré. On peut écrire encore

$$\left[(x-l)^2+(y-m)^2+(z-n)^2\right]^2 + \theta_1(x-l, y-m, z-n) = 0$$

où θ_1 est encore un polynôme du second degré en $x-l$, $y-m$, $z-n$. Si en transportant l'origine au point l, m, n, on obtient la forme réduite

$$(x^2+y^2+z^2)^2 + \psi(x,y,z) = 0$$

où $\psi(x,y,z$ est le premier membre de l'équation d'une quadrique En faisant tourner les axes, on pourra, et d'une seule manière en général faire disparaître les rectangles dans $\psi(x,y,z)$ et on aura alors la forme réduite

$$(x^2+y^2+z^2)^2 - 4Lx^2 - 4L'y^2 - 4L''z^2 + 8Mx + 8M'y + 8M''z + 4P = 0$$

Cette forme est identique à celle que nous avons obtenue pour les cyclides. Pour établir exactement l'identification il suffira d'écrire

$$A+\delta = L, \quad A'+\delta = L', \quad A''+\delta = L''$$
$$A\alpha = M, \quad A'\beta = M', \quad A''\gamma = M''$$
$$P = \delta^2 - A\alpha^2 - A'\beta^2 - A''\gamma^2$$

Des six premières équations on tire

$$A = L-\delta, \quad A' = L'-\delta, \quad A'' = L''-\delta$$
$$\alpha = \frac{M}{L-\delta}, \quad \beta' = \frac{M'}{L'-\delta}, \quad \gamma = \frac{M''}{L''-\delta}$$

équations qui font tout dépendre de δ. Quant à δ on l'obtient par l'équation

$$A\alpha^2 + A'\beta^2 + A''\gamma^2 + P - \delta^3 = \frac{M^2}{L-\delta} + \frac{M'^2}{L'-\delta} + \frac{M''^2}{L''-\delta} + P - \delta^2 = f(\delta) = 0$$

Posons

$$g(\delta) = (P-\delta^2)(L-\delta)(L'-\delta)(L''-\delta) + M^2(L'-\delta)(L''-\delta) + M'^2(L''-\delta)(L-\delta) + M''^2(L-\delta)(L'-\delta)$$

il vient

$$f(\delta) = \frac{g(\delta)}{(L-\delta)(L'-\delta)(L''-\delta)}$$

L'équation $f(\delta) = 0$, ou, ce qui revient au même, $g(\delta) = 0$ est du cinquième degré, elle fournit donc cinq modes d'identification. Ainsi se trouve établi ce théorème dû à Mr Moutard. Toute surface du quatrième ordre bi-circulaire est anallagmatique de cinq manières en général.

Il y a cependant des cas singuliers, comme dans le cas des cycliques planes. Nous aurons occasion d'y revenir. Faisons quelques remarques générales. Les cinq déférentes sont contenues dans l'équation tangentielle

$$(L-\delta)\xi^2+(L'-\delta)\eta^2+(L''-\delta)\zeta^2-\tau^2=0$$

elles sont donc homofocales.

Soient δ, δ' deux racines de $f(\delta)=0$; et $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ $(\alpha', \beta', \gamma', \delta')$ les deux sphères directrices correspondantes, on a

$$\alpha=\frac{M}{L-\delta}, \quad \alpha'=\frac{M}{L-\delta'} \quad \text{etc} \ldots$$

donc

$$\alpha\alpha'+M'+\gamma\gamma'-\delta-\delta' = \frac{M^2}{(L-\delta)(L-\delta')}+\frac{M'^2}{(L'-\delta)(L'-\delta')}$$

$$+\frac{M''^2}{(L''-\delta)(L''-\delta')}-\delta-\delta'$$

$$=\frac{f(\delta)-f(\delta')}{\delta-\delta'}=0.$$

puisque $f(\delta)=f(\delta')=0$. Donc les cinq sphères directrices des cinq anallagmatiques sont orthogonales deux à deux.

Considérons la déférente

$$(L-\delta)\xi^2+(L'-\delta)\eta^2+(L''-\delta)\zeta^2-\tau^2=0$$

ou en coordonnées ponctuelles

$$\frac{x^2}{L-\delta}+\frac{y^2}{L'-\delta}+\frac{z^2}{L''-\delta}-1=0$$

et la sphère directrice correspondante

$$x^2+y^2+z^2-2\alpha x-2\beta y-2\gamma z+2\delta=0$$

On constatera, par le même calcul qui a été développé pour les cycliques planes, que les centres des quatre autres anallagmatiques de la surface sont les sommets du tétraèdre conjugué commun à la déférente et à la sphère déférente.

Nous arrivons à la discussion générale des diverses espèces de cyclides du 4e degré. Elle diffère en plusieurs points de celle qui a trait aux cycliques planes. Je démontrerai pour commencer les théorèmes suivants:

Théorème I — Si L est racine de $g(\delta)=0$ la cyclide perd au moins une anallagmatie, mais acquiert un plan de symétrie.

En effet, L peut figurer parmi les racines de $g(\delta)=0$, soit parce que $L=L'$, soit parce que $M=0$. Si $L=L'$ l'équation de la cyclide a la forme

$$(x^2+y^2+z^2)^2 - 4L(x^2+y^2) - 4L''z^2 + 8Mx + 8M'y + M''z + 4P = 0$$

En faisant tourner les axes ox, oy autour de oz on peut amener M à zéro et réduire l'équation de la cyclide à la forme

$$(x^2+y^2+z^2)^2 - 4L(x^2+y^2) - 4L'z^2 + 8'M'y + 8M''z + 4P = 0.$$

Ainsi lorsque L est racine de $g(\delta)$ on peut toujours supposer $M=0$. Mais alors, la cyclide a un plan de symétrie $x=0$, et, du reste ces anallagmaties dépendent de l'équation

$$P - \delta^2 + \frac{M'^2}{L'-\delta} + \frac{M''^2}{L''-\delta} = 0,$$

qui est au plus du quatrième degré.

Théorème II — Si δ est une racine double de $g(\delta)=0$ autre que L L', L", la cyclide a un point double et se trouve être tout à la fois, l'inverse d'une quadrique, et la podaire d'une quadrique à centre.

En effet, soient α, β, γ les coordonnées du centre O de la sphère directrice qui correspond à cette racine double δ, on a

$$\alpha = \frac{M}{L-\delta}, \quad \beta = \frac{M'}{L'-\delta}, \quad \gamma = \frac{M''}{L''-\delta};$$

le carré du rayon de la sphère est donc

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\delta = \frac{M^2}{(L-\delta)^2} + \frac{M'^2}{(L'-\delta)^2} + \frac{M''^2}{(L''-\delta)^2} - 2\delta = f'(\delta)$$

c'est-à-dire $=0$, puisque δ est racine double de $g(\delta)$, ou de $f(\delta)$, ce qui est ici la même chose. Le rayon de la sphère directrice étant nul, l'anallagmatie correspondante est exceptionnelle, le point (α, β, γ) est un point double, et la cyclide est tout à la fois l'inverse d'une **quadrique**

la podaire d'une autre quadrique. Cette quadrique est l'homothétique de la déférente exceptionnelle

$$(L-\delta)\xi^2+(L'-\delta)\eta^2+(L''-\delta)\zeta^2-\tau^2=0,$$

laquelle ne se réduit pas à une conique, puisque $L-\delta$, $L'-\delta$, $L''-\delta$ ne sont pas nuls.

Remarque — La formule

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\delta=f'(\delta)$$

prouve que, réciproquement, si la cyclide possède une anallagmatie exceptionnelle correspondant à une racine δ autre que L, L', L'' cette racine δ est double ; en effet pour une anallagmatie exceptionnelle, on a

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\delta=0$$

c'est-à-dire $f'(\delta)=0$.

C'est la réciproque du Théorème II

Théorème III — Si $g(\delta)=0$ admet une racine triple δ autre que L, L', L'' la cyclide est une podaire de quadrique, seulement le pôle est sur la quadrique ; c'est aussi la surface inverse d'un paraboloïde.

En effet, pour démontrer que le point O_1 est sur la quadrique D_1, il suffit de prouver qu'il est sur la quadrique D, attendu que D et D_1 sont homothétiques par rapport au point O_1. Substituons donc les coordonnées α, β, γ du point O_1 dans l'équation de D il vient

$$\frac{\alpha^2}{L-\delta}+\frac{\beta^2}{L'-\delta}+\frac{\gamma^2}{L''-\delta}-1=\frac{M'^2}{(L'-\delta)^3}+\frac{M'^2}{(L'-\delta)^3}+\frac{M''^2}{(L''-\delta)^3}-1=\frac{1}{2}f''(\delta)$$

Si δ est racine triple de $g(\delta)$ on a $f''(\delta)=0$, et par suite le point O_1 est bien sur D et D_1. La formule précédente démontre en même temps la réciproque de cette proposition.

La quadrique dont la cyclide est l'inverse est, nous le savons, la polaire réciproque de D_1 par rapport à la sphère directrice de l'inversion, laquelle a son centre au point O_1 ; puisque D_1 passe au centre O_1 de la sphère, la quadrique polaire réciproque touche le plan de l'infini, c'est un paraboloïde

Remarque — Si l'on calcule $f'''(\delta)$ on trouve

à $O_1 O_2$, ou encore, la cyclide étant définie par sa conique antipodaire D'_1 et par le pôle O_1, le second point double O_2 est la projection de O_1 sur le plan de la conique. Il est bien évident du reste que la cyclide est aussi la podaire par rapport aux points O_2 de la conique D''_1 homothétique de D_1, O_2 étant le pôle d'homothétie et 2 le module d'homothétie. Il suffit, pour le voir, de remarquer que, par une inversion de pôle O_2 la cyclide devient un cône.

On observera que si le cône devient un cylindre le point O_2 vient se confondre avec le point O_1 qui se trouve ainsi être dans le plan même de la conique D_1; la conique D'_1 est aussi dans ce plan et la cyclide est la podaire d'une conique par rapport à un point de son plan.

Sans pousser plus loin cette discussion, nous passerons à un autre problème qui se présente ici naturellement. Les inverses de cônes ou de cylindres sont des cyclides à déférente curviligne. Est-ce le seul cas?

Supposons qu'une cyclide soit l'enveloppe d'une sphère S orthogonale à une sphère fixe Σ, et dont le centre décrit une conique D_1. Toutes ces sphères S sont orthogonales à la sphère Σ, et au plan Δ qui contient D_1; elles sont donc orthogonales à toutes les sphères Σ menées par le cercle Θ_1 d'intersection de Σ avec le plan Δ. On sait en effet que toutes les sphères orthogonales à deux sphères d'un faisceau sont orthogonales à toutes les sphères du faisceau. En particulier, elles sont orthogonales aux deux sphères de rayon nul que l'on peut mener par ce cercle, ce qui veut dire qu'elles passent par les deux centres O_1, O_2 de ces sphères, lesquels sont symétriques par rapport au plan Δ et sont sur la perpendiculaire élevée au cercle Θ_1 en son centre (axe du cercle Θ_1). Toutes nos sphères enveloppées passent donc par ces deux points fixes O_1, O_2. Je dis que ces points sont des points doubles de la cyclide, et qu'ils admettent comme cônes de tangentes les cônes supplémentaires des deux cônes qui ont $O_1 O_2$ comme sommets et D_1 pour base.

En effet, soit M un point de D_1 et S la sphère enveloppée qui a son centre en M.

Cette sphère touche la cyclide suivant un cercle, que l'on obtient en la coupant par un plan mené par $O_1 O_2$ perpendiculairement à la tangente MT en M à la conique D_1. Appelons T le point où ce plan rencontre cette tangente. La droite TO_1 est un rayon du cercle de contact et la perpendiculaire $O_1 T'$ au plan $O_1 TM$ est la tangente à ce cercle en O_1. Du reste, le plan $O_1 TM$ touche le long de $O_1 M$ le cône de base D_1 et de sommet O_1; il en résulte que $O_1 T'$ est une génératrice du cône supplémentaire de ce cône. Ce cône supplémentaire est aussi le lieu des tangentes $O_1 T$ au point O_1 aux cercles de contact; c'est donc le cône des tangentes de la cyclide au point O_1. On voit ainsi non seulement que O_1 est un point double, mais encore quel est le cône des tangentes. De même pour O_2. Une inversion de pôle O_1 (ou O_2) transformera la cyclide en un cône.

Cependant, si O_1 et O_2 sont confondus, ce qui aura lieu si le cercle O_1 est de rayon nul, ils viennent se confondre avec le centre O_1 de ce cercle dans le plan Δ; tous les cercles de contact sont tangents à la normale en O_1 au plan Δ. C'est le cas où la cyclide est l'inverse d'un cylindre.

Il est ainsi établi que toute cyclide à déférente plane a deux points doubles qui (peuvent devenir infiniment voisins) et qu'elle est l'inverse d'un cône ou d'un cylindre.

Effectuons une inversion quelconque, notre cylindre à déférente plane va se transformer en une autre cyclide enveloppée par des sphères à un paramètre, et, par suite à déférente plane. Toutes les sphères S' étaient orthogonales précédemment à toutes les sphères Σ menées par un certain cercle Θ_1; dans la cyclide transformée les sphères S'_1 transformées des sphères S_1 seront orthogonales à toutes les sphères Σ' menées par le cercle Θ'_1, transformé du cercle Θ.

Mais que le pôle d'inversion soit pris sur le cercle Θ_1 lui-même; alors Θ'_1 est une droite et les sphères Σ' ont leurs centres sur cette droite, la surface cyclide est donc devenue une surface de révolution; les sphères Σ' sont les plans méridiens de la surface.

Réciproquement, soit une cyclide de révolution, et appelons Θ'_1 son axe, Σ' les plans méridiens, S' les sphères circonscrites suivant les parallèles. Ces sphères forment un système du second degré. Il suffit pour le montrer, de prouver que leurs traces T sur un plan méridien constituent une famille de cercles du second degré. Or en effet, tout plan coupe la cyclide suivant une cyclique; en particulier un plan méridien la coupe suivant une cyclique qui est évidemment symétrique par rapport à l'axe de révolution, et à laquelle les cercles T sont bi-tangents. Comme il n'y a pas d'autres cercles bi-tangents à une cyclique que ceux qui proviennent d'une génération anallagmatique il en résulte que la famille des cercles T est bien du second degré.

Effectuons alors une inversion quelconque. Les sphères S' vont se transformer en des sphères formant une famille du second degré, orthogonales au cercle Θ_1, transformée de l'axe de révolution Θ'_1; elles constitueront ainsi une génération anallagmatique à déférente plane de la cyclide. Celle-ci admettra comme points doubles les centres des sphères de rayon nul menées par Θ_1.

En particulier, l'inverse d'une quadrique de révolution sera une cyclide à trois points doubles, savoir: Un au pôle d'inversion, et deux autres, aux centres des sphères de rayon nul menées par le cercle qui est l'inverse de l'axe de révolution de la quadrique.

L'inverse d'un cône de révolution aura quatre points doubles: un au pôle d'inversion, un au point inverse du sommet du cône, et deux autres aux centres des sphères de rayon nul menées par le cercle qui est l'inverse de l'axe de révolution.

Les plans tangents au cône et les sphères inscrites dans le cône fournissent deux familles de sphères inscrites dans la cyclide: Celle-ci admet donc deux générations anallagmatiques à déférente plane, et ses deux familles de lignes de courbure sont circulaires. C'est la célèbre cyclide de Dupin.

On en obtient une variété en supposant que le cône de révolution

devient un cylindre de révolution. C'est le cas où deux des points doubles coïncident

Il est clair que toute cyclide qui a deux déférentes curvilignes est l'inverse d'un cône ou d'un cylindre de révolution. En effet, on voit tout d'abord qu'elle a quatre points doubles, et, une inversion faite de l'un d'eux comme pôle change les sphères d'un des modes de génération dans les plans tangents d'un cône ou d'un cylindre. Les sphères inscrites du second système de génération deviennent des sphères inscrites dans le cône ou le cylindre, en sorte que cette quadrique inverse est de révolution.

Une démonstration analogue prouve que toute cyclide à trois points doubles est l'inverse d'une quadrique de révolution.

Les surfaces inverses de quadriques ponctuelles sont des podaires de quadriques tangentielles, il est donc intéressant de savoir quelle propriété des quadriques antipodaires correspond à l'hypothèse que la cyclide est l'inverse d'une quadrique de révolution. Considérons une cyclide inverse, par rapport à un pôle O, d'une quadrique Q de révolution. Cette quadrique Q est bi-tangente au cercle de l'infini par définition; sa podaire réciproque D' par rapport à une sphère de centre O sera donc bi-tangente au cône qui est la polaire réciproque du cercle de l'infini par rapport à la sphère. Or le cône réciproque du cercle de l'infini par rapport à une sphère n'est autre évidemment que le cône asymptote de la sphère, c'est-à dire la sphère de rayon nul qui est concentrique à la sphère. Nous reconnaissons ainsi que la sphère de rayon nul de centre O est bi-tangente à la quadrique D' aussitôt que la quadrique Q est de révolution. Le point O est donc un point d'une focale de D'. De là ce théorème:

Une cyclide inverse d'une quadrique de révolution est la podaire d'une quadrique par rapport à un point d'une de ses focales.

En particulier

La cyclide de Dupin (inverse d'un cône de révolution) est la podaire d'une conique par rapport à un point de l'une de ses focales.

Des Anallagmaties dans les Cyclides.

J'ai annoncé que je prouverais d'une manière détaillée que toute surface du 4ème ordre bi-circulaire, et toute surface cubique circulaire était une cyclide. La marche suivante que je vais indiquer rapidement pour le cas des surfaces du 4ème ordre bi-circulaires s'applique également aux surfaces cubiques circulaires.

Cherchons d'abord à mettre sous une forme simple l'équation des surfaces cyclides dont la déférente a un centre. Rapportons la déférente à son centre et à ses axes; son équation tangentielle sera

$$A\xi^2 + A'\eta^2 + A'\zeta^2 - \tau^2 = 0,$$

et $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ étant les coordonnées de la sphère directrice, nous avons pour la cyclide cette équation

$$A(x-\alpha)^2 + A'(y-\beta)^2 + A''(z-\gamma)^2 - \left(\delta - \frac{x^2+y^2+z^2}{2}\right)^2 = 0.$$

ou encore

$$(x^2+y^2+z^2)^2 - 4(A+\delta)x^2 - 4(A'+\delta)y^2 - 4(A''+\delta)z^2 + 8A\alpha x + 8A'\beta y + 8A''\gamma z + 4[\delta^2 - A\alpha^2 - A'\beta^2 - A''\gamma^2] = 0.$$

Je vais prouver que l'équation de toute surface du 4ème ordre bi-circulaire peut recevoir cette forme. L'équation de toute surface du 4ème ordre a la forme

$$\omega_4(x,y,z) + \omega_3(x,y,z)\,t + \omega_2(x,y,z)\,t^2 + \omega_1(x,y,z)\,t^3 + \omega_0\,t^4 = 0$$

où ω_i est un polynôme homogène en x, y, z du degré i. La section par le plan de l'infini est représentée par $t=0$, $\omega_4(x,y,z)=0$; et comme ici cette section doit se composer exclusivement du cercle de l'infini il faut avoir:

$$\omega_4(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^2.$$

Posons donc :

$$\phi(x, y\ z, t) = \left(x^2+y^2+z^2\right)^2 + \omega_3(x, y, z)\,t + \omega_2(x\ y, z)\,t^2 + \omega_1(x, y, z)\,t^3 + \omega_0 t^4$$

et calculons les dérivées $\frac{\partial \phi}{\partial x}$, etc ..., nous aurons, en désignant par $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ des polynômes homogènes du second degré

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 4\left(x^2+y^2+z^2\right)x + t\cdot\psi_1(x, y, z, t)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 4\left(x^2+y^2+z^2\right)x + t\cdot\psi_2$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 4\left(x^2+y^2+z^2\right)x + t\cdot\psi_3$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \omega_3(x, y, z) + t\cdot\psi_4$$

Si l'on fait $t=0$ $x^2+y^2+z^2=0$, c'est-à-dire si l'on prend un point sur le cercle de l'infini on a

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$$

et puis,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \omega_3(x, y, z)$$

Pour que tout point du cercle de l'infini soit sur la surface un point double, il faut que $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ soit aussi nul, et par suite $\omega_3(x, y, z)$ doit s'annuler en même temps que $x^2+y^2+z^2$: il faut en conséquence, que $x^2+y^2+z^2$ divise ω_3 ; posons donc

$$\omega_3 = -2(lx+my+nz)\left(x^2+y^2+z^2\right)$$

et il vient, pour équation de la surface du 4ième degré bi-circulaire

$$\left(x^2+y^2+z^2\right)^2 - 2(lx+my+nz)\left(x^2+y^2+z^2\right) + \theta(x, y, z) = 0$$

où θ est un polynôme en $x, y\ z$ du second degré. On peut écrire encore

$$\left[(x-l)^2+(y-m)^2+(z-n)^2\right]^2 + \theta_1(x-l, y-m, z-n) = 0$$

où θ_1 est encore un polynôme du second degré en $x-l$, $y-m$, $z-n$, et en transportant l'origine au point l, m, n, on obtient la forme réduite

$$(x^2+y^2+z^2)^2 + \Psi(x,y,z) = 0$$

où $\Psi(x,y,z$ est le premier membre de l'équation d'une quadrique En faisant tourner les axes, on pourra, et d'une seule manière en général faire disparaître les rectangles dans $\Psi(x,y,z)$ et on aura alors la forme réduite

$$(x^2+y^2+z^2)^2 - 4Lx^2 - 4L'y^2 - 4L''z^2 + 8Mx + 8M'y + 8M''z + 4P = 0$$

Cette forme est identique à celle que nous avons obtenue pour les cyclides. Pour établir exactement l'identification il suffira d'écrire

$$A+\delta = L, \quad A'+\delta = L', \quad A''+\delta = L''$$
$$A\alpha = M, \quad A'\beta = M', \quad A''\gamma = M''$$
$$P = \delta^2 - A\alpha^2 - A'\beta^2 - A''\gamma^2$$

Des six premières équations on tire

$$A = L-\delta, \quad A' = L'-\delta, \quad A'' = L''-\delta$$
$$\alpha = \frac{M}{L-\delta}, \quad \beta' = \frac{M'}{L'-\delta}, \quad \gamma = \frac{M''}{L''-\delta}$$

équations qui font tout dépendre de δ. Quant à δ on l'obtient par l'équation

$$A\alpha^2 + A'\beta^2 + A''\gamma^2 + P - \delta^2 = \frac{M^2}{L-\delta} + \frac{M'^2}{L'-\delta} + \frac{M''^2}{L''-\delta} + P - \delta^2 = f(\delta) = 0$$

Posons

$$g(\delta) = (P-\delta^2)(L-\delta)(L'-\delta)(L''-\delta) + M^2(L'-\delta)(L''-\delta) + M'^2(L''-\delta)(L-\delta) + M''^2(L-\delta)(L'-\delta)$$

il vient

$$f(\delta) = \frac{g(\delta)}{(L-\delta)(L'-\delta)(L''-\delta)}$$

L'équation $f(\delta) = 0$, ou, ce qui revient au même, $g(\delta) = 0$ est du cinquième degré, elle fournit donc cinq modes d'identification. Ainsi se trouve établi ce théorème dû à Mr Moutard. Toute surface du quatrième ordre bi-circulaire est anallagmatique de cinq manières en général.

Il y a cependant des cas singuliers, comme dans le cas des cycliques planes. Nous aurons occasion d'y revenir. Faisons quelques remarques générales. Les cinq déférentes sont contenues dans l'équation tangentielle

$$(L-\delta)\xi^2+(L'-\delta)\eta^2+(L''-\delta)\zeta^2-\tau^2=0$$

elles sont donc homofocales.

Soient δ, δ' deux racines de $f(\delta)=0$; et $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ $(\alpha', \beta', \gamma', \delta')$ les deux sphères directrices correspondantes, on a

$$\alpha=\frac{M}{L-\delta}, \quad \alpha'=\frac{M}{L-\delta'} \quad \text{etc} \ldots$$

donc

$$\alpha\alpha'+M'+\gamma\gamma'-\delta-\delta'=\frac{M^2}{(L-\delta)(L-\delta')}+\frac{M'^2}{(L'-\delta)(L'-\delta')}$$

$$+\frac{M''^2}{(L''-\delta)(L''-\delta')}-\delta-\delta'$$

$$=\frac{f(\delta)-f(\delta')}{\delta-\delta'}=0.$$

puisque $f(\delta)=f(\delta')=0$. Donc les cinq sphères directrices des cinq anallagmaties sont orthogonales deux à deux.

Considérons la déférente

$$(L-\delta)\xi^2+(L'-\delta)\eta^2+(L''-\delta)\zeta^2-\tau^2=0$$

ou en coordonnées ponctuelles

$$\frac{x^2}{L-\delta}+\frac{y^2}{L'-\delta}+\frac{z^2}{L''-\delta}-1=0$$

et la sphère directrice correspondante

$$x^2+y^2+z^2-2\alpha x-2\beta y-2\gamma z+2\delta=0$$

On constatera, par le même calcul qui a été développé pour les cycliques planes, que les centres des quatre autres anallagmaties de la surface sont les sommets du tétraèdre conjugué commun à la déférente et à la sphère déférente.

Nous arrivons à la discussion générale des diverses espèces de cyclides du 4e degré. Elle diffère en plusieurs points de celle qui a trait aux cycliques planes. Je démontrerai pour commencer les théorèmes suivants:

Théorème I — Si L est racine de $g(\delta)=0$ la cyclide perd au moins une anallagmatie, mais acquiert un plan de symétrie.

En effet, L peut figurer parmi les racines de $g(\delta)=0$, soit parce que $L=L'$, soit parce que $M=0$. Si $L=L'$ l'équation de la cyclide a la forme

$$(x^2+y^2+z^2)^2 - 4L(x^2+y^2) - 4L''z^2 + 8Mx + 8M'y + M''z + 4P = 0$$

En faisant tourner les axes ox, oy autour de oz on peut amener M à zéro et réduire l'équation de la cyclide à la forme

$$(x^2+y^2+z^2)^2 - 4L(x^2+y^2) - 4L'z^2 + 8'M'y + 8M''z + 4P = 0.$$

Ainsi lorsque L est racine de $q(\delta)$ on peut toujours supposer $M=0$. Mais alors, la cyclide a un plan de symétrie $x=0$, et, du reste ces anallagmaties dépendent de l'équation

$$P - \delta^2 + \frac{M'^2}{L'-\delta} + \frac{M''^2}{L''-\delta} = 0,$$

qui est au plus du quatrième degré.

Théorème II — Si δ est une racine double de $g(\delta)=0$ autre que L, L', L'', la cyclide a un point double et se trouve être tout à la fois, l'inverse d'une quadrique, et la podaire d'une quadrique à centre.

En effet, soient α, β, γ les coordonnées du centre O de la sphère directrice qui correspond à cette racine double δ, on a

$$\alpha = \frac{M}{L-\delta}, \quad \beta = \frac{M'}{L'-\delta}, \quad \gamma = \frac{M''}{L''-\delta};$$

le carré du rayon de la sphère est donc

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\delta = \frac{M^2}{(L-\delta)^2} + \frac{M'^2}{(L'-\delta)^2} + \frac{M''^2}{(L''-\delta)^2} - 2\delta = f'(\delta)$$

c'est-à-dire $=0$, puisque δ est racine double de $g(\delta)$, ou de $f(\delta)$, ce qui est ici la même chose. Le rayon de la sphère directrice étant nul, l'anallagmatie correspondante est exceptionnelle, le point (α, β, γ) est un point double, et la cyclide est tout à la fois l'inverse d'une quadrique et

la podaire d'une autre quadrique. Cette quadrique est l'homothétique de la déférente exceptionnelle

$$(L-\delta)\xi^2+(L'-\delta)\eta^2+(L''-\delta)\zeta^2-\tau^2=0,$$

laquelle ne se réduit pas à une conique, puisque $L-\delta$, $L'-\delta$, $L''-\delta$ ne sont pas nuls.

Remarque — La formule

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\delta=f'(\delta)$$

prouve que, réciproquement, si la cyclide possède une anallagmatie exceptionnelle correspondant à une racine δ autre que L, L', L'' cette racine δ est double ; en effet pour une anallagmatie exceptionnelle, on a

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\delta=0$$

c'est-à-dire $f'(\delta)=0$.

C'est la réciproque du Théorème II

Théorème III — Si $g(\delta)=0$ admet une racine triple δ autre que L, L', L'' la cyclide est une podaire de quadrique, seulement le pôle est sur la quadrique ; c'est aussi la surface inverse d'un paraboloïde.

En effet, pour démontrer que le point O_1 est sur la quadrique D_1, il suffit de prouver qu'il est sur la quadrique D, attendu que D et D_1 sont homothétiques par rapport au point O_1. Substituons donc les coordonnées α, β, γ du point O_1 dans l'équation de D il vient

$$\frac{\alpha^2}{L-\delta}+\frac{\beta^2}{L'-\delta}+\frac{\gamma^2}{L''-\delta}-1=\frac{M'^2}{(L'-\delta)^3}+\frac{M'^2}{(L'-\delta)^3}+\frac{M''^2}{(L''-\delta)^3}-1=\frac{1}{2}f''(\delta)$$

Si δ est racine triple de $g(\delta)$ on a $f''(\delta)=0$, et par suite le point O_1 est bien sur D et D_1. La formule précédente démontre en même temps la réciproque de cette proposition.

La quadrique dont la cyclide est l'inverse est, nous le savons, la polaire réciproque de D_1 par rapport à la sphère directrice de l'inversion, laquelle a son centre au point O_1 ; puisque D_1 passe au centre O_1 de la sphère, la quadrique polaire réciproque touche le plan de l'infini, c'est un paraboloïde

Remarque — Si l'on calcule $f'''(\delta)$ on trouve

$$f'''(\delta) = 6\left\{\frac{M^2}{(L-\delta)^4} + \frac{M'^2}{(L'-\delta)^4} + \frac{M''^2}{(L''-\delta)^4}\right\} > 0$$

et par suite, $g(\delta) = 0$ ne peut avoir de racine quadruple, ni quintuple. Le raisonnement tombe il est vrai si $M = M' = M'' = 0$, mais alors $g(\delta) = 0$ admet les trois racines L, L', L'' et ne peut admettre, en conséquence de racine quadruple ni même triple, différente de ces quantités.

Théorème IV — Pour que la cyclide admette une génération par sphères à un paramètre, il faut et il suffit que l'une des quantités L, L', L'' soit racine double (ou multiple) de $g(\delta) = 0$.

D'abord, pour que la déférente

$$(L-\delta)\xi^2 + (L'-\delta)\eta^2 + (L''-\delta)\zeta^2 - \tau^2 = 0$$

se réduise à une conique, il faut évidemment que l'une des quantités $L-\delta$, $L'-\delta$, $L''-\delta$ soit nulle. Soit donc $L-\delta = 0$.

Nous savons que si L est racine de $g(\delta) = 0$, on peut toujours supposer $M = 0$. Cela étant, les formules d'identification nous donneront pour δ l'équation

$$P - \delta^2 + \frac{M'^2}{L'-\delta} + \frac{M''}{L''-\delta} = 0.$$

avec

$$(L-\delta)\alpha = 0, \quad (L'-\delta)\beta = M', \quad (L''-\delta)\gamma = M''.$$

Sans qu'il soit nécessaire d'insister le lecteur reconnaîtra ces cyclides inverses de cônes dont il a été déjà longuement question.

Il est bon de calculer les coordonnées des points o_1, o_2, nous avons déjà leurs coordonnées β, γ

$$\beta = \frac{M'}{L'-L} \qquad \gamma = \frac{M''}{L''-L}$$

Quant à α, pour l'avoir on exprime que la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x + 2\frac{M'}{L'-L}y + 2\frac{M''}{L''-L}z + 2L = 0.$$

a un rayon nul, ce qui donne

$$\alpha^2 + \frac{M'^2}{(L'-L)^2} + \frac{M''^2}{(L''-L)^2} - 2L = 0$$

c'est-à-dire puisque l'on a posé

$$f_1(L) = P - L^2 + \frac{M'^2}{L'-L} + \frac{M''^2}{L''-L},$$

$$\alpha^2 + f_1'(L) = 0$$

d'où

$$\alpha = \pm\sqrt{-f_1'(L)}$$

Les points O_1, O_2 sont donc réels ou imaginaires selon le signe de $f_1'(L)$. Pour qu'ils coïncident, il faut et il suffit que $f_1'(L) = 0$, on a alors $\alpha = 0$.

Remarque — Nous avons laissé de côté le cas de $L = L'$ ou L''. Soit $L = L'$: on peut toujours supposer alors $M = 0$, et il se trouve que $g(S)$ s'écrit

$$g(S) = (P - S^2)(L-S)^2(L''-S) + [M'^2(L''-S) + M''^2(L-S)](L-S);$$

on voit que si l'on veut que, dans ces conditions, L soit racine double de $g(S) = 0$, il faut et il suffit ou bien que $M' = 0$, ou bien que $L'' = L$ déjà égal à L'. Mais si $L = L' = L''$, la cyclide a une équation de la forme

$$(x^2+y^2+z^2)^2 - 4L(x^2+y^2+z^2) + 8Mx + 8M'y + 8M''z + 4P = 0,$$

et en faisant tourner les axes et plaçant oz normal au plan

$$Mx + M'y + M''z = 0$$

on peut supposer $M = M' = 0$. D'où la forme réduite

$$(x^2+y^2+z^2)^2 - 4L(x^2+y^2+z^2) + 8M''z + 4P = 0$$

Notons en passant que $M'' = 0$ entraînerait la décomposition en deux sphères concentriques.

Ainsi, dans tous les cas on pourra, L étant égal à L' et étant racine double de $g(S) = 0$, supposer à la fois $M = M' = 0$. La surface cyclide est alors de révolution autour de oz ; nous savons que, dans ce cas, elle possède encore une génération anallagmatique par des sphères dépendant

d'un paramètre, seulement ici la déférente se réduit à l'axe de révolution. Le théorème IV est donc encore vrai dans ce cas. Ce cas n'est pas du reste bien différent du cas général, puisque une inversion suffit, nous le savons, pour ramener une cyclique de révolution à une cyclide à deux points doubles et inverscment.

Dans tous les cas, et c'est là un fait important, l'hypothèse de L racine double de $g(S)=0$ correspond exactement à une cyclide à lignes de courbures circulaires.

Théorème V — Si L est une racine triple de $g(S)=0$, les points o_1, o_2 coïncident, la cyclide est l'inverse d'un cylindre et la podaire d'une conique par rapport à un point de son plan.

Montrons d'abord que L ne peut être égal à L' dans cette hypothèse sans qu'il y ait décomposition. Si $L=L'$ est racine multiple de $g(S)$ on peut supposer toujours, nous le savons $M=M'=0$; on a donc

$$g(S)=\left[(P-S^2)(L''-S)+M''^2\right](L-S)^2.$$

Si L est racine triple de $g(S)=0$, on a

$$(P-L^2)(L''-L)+M''^2=0.$$

Si l'on avait $L''=L$, il faudrait avoir aussi $M''=0$ et la cyclide se composerait de deux sphères concentriques.

Si $L''-L$ n'est pas nul, on peut écrire

$$P-L^2+\frac{M''^2}{L''-L}=0$$

et l'équation de la cyclide s'écrit

$$(x^2+y^2+z^2-2L)^2-4(L''-4)\left(z-\frac{M''}{L''-L}\right)^2=0$$

forme qui marque bien encore une décomposition en deux sphères.

Supposons donc L racine triple de $g(S)=0$, mais distinct de L' et L''. La coïncidence des points o, o_1 s'exprime justement par l'équation

$$\alpha^2=-f_1'(L)=0,$$

qui exprime que L est racine double de $f_1(\delta)=0$, et, par suite, racine triple de $g(\delta)=0$; le point O_1 est venu se confondre avec O_2 ; son inverse, sommet du cône inverse de la cyclide est donc à l'infini ; ce cône est devenu un cylindre. On peut le voir autrement.

D_1, la conique dont la cyclide est la podaire par rapport au point O_2, est l'homothétique de la déférente D autour du point O_2, lequel est dans le plan de D. Donc D_1 est dans le plan de D. La cyclide est donc la podaire d'une conique D_1 par rapport à un point O_1 de son plan. Or le cône inverse de la cyclide est la polaire réciproque de D_1 par rapport à une sphère dont O_2 est le centre. Puisque le plan de D_1 passe au centre de cette sphère, le pôle de ce plan, sommet du cône, est à l'infini ; le cône est devenu un cylindre.

Théorème VI — Si L est racine quadruple de $g(\delta)=0$, le point O_1 du théorème précédent est sur la déférente D_1, la cyclide est la podaire d'une conique par rapport à un de ses points, et l'inverse d'un cylindre parabolique.

En effet, les coordonnées du point O_1 sont

$$\alpha=0, \qquad \beta=\frac{M'}{L'-L} \qquad \gamma=\frac{M''}{L''-L};$$

l'équation de D_1 dans le plan $x=0$ s'écrit

$$\frac{y^2}{L'-L}+\frac{z^2}{L''-L}-1=0,$$

et en substituant les coordonnées du point O on trouve

$$\frac{M'^2}{(L'-L)^3}+\frac{M''^2}{(L''-L)^3}-1=-\frac{1}{2}f_1''(L)$$

Pour que le point O_1 soit sur D_1 il faut donc, et il suffit que $f_1''(L)=0$, c'est-à-dire que L soit racine triple de $f_1(\delta)=0$, et, en conséquence, quadruple de $g(\delta)=0$.

Le point O_1 étant sur D_1 est aussi sur son homothétique D_1' ; la cyclide est donc la podaire de la conique D_1' par rapport à l'un de ses

points. La polaire réciproque de D_1 par rapport à une sphère de centre O_2 sera d'abord un cylindre, puisque le plan de D_1 passe par le point O_2 et en second lieu un cylindre parabolique (tangent au plan de l'infini) puisque la conique D_1 passe au point O_2. La cyclide est donc l'inverse d'un cylindre parabolique.

Remarque. — Il n'est pas possible que L soit racine quintuple de $q(\delta)=0$, car $f_1(\delta)=0$ ne peut avoir de racine quadruple, attendu que $f_1'''(\delta)$ est essentiellement négatif.

Remarque — Il résulte des calculs précédents que si une cyclide admet une déférente curviligne et puis d'autres déférentes non curvilignes, ces quadriques admettent pour focale la conique déférente.

De même, si une cyclide admet deux déférentes curvilignes, ces deux coniques sont focales l'une de l'autre. C'est le cas de la cyclide de Dupin.

Théorème VII — Si $L=L'$ (et alors on peut faire $M=0$) la cyclide admet comme déférentes des surfaces de révolution, et réciproquement.

Ce théorème résulte de l'équation même des déférentes

$$(L-\delta)(\xi^2+\eta^2)+(L''-\delta)\xi^2-\tau^2=0$$

Théorème VIII — Si $L=L'$ et $M=M'=0$ la cyclide est de révolution, et réciproquement, ces conditions sont nécessaires pour que la cyclide soit de révolution.

Nous avons déjà vu la proposition directe. Reste sa réciproque qui fixe le type général des cyclides de révolution. On peut faire le raisonnement suivant : toute cyclide est coupée par un plan suivant une quartique bi-circulaire, c'est-à-dire, suivant une cyclique.

En particulier un plan méridien d'une cyclide de révolution la coupe suivant une cyclique ; de plus, cette cyclique admet évidemment pour axe de symétrie l'axe oz. Nous formerons donc l'équation générale des cycliques tracées dans le plan des xz et qui admettent oz pour axe de symétrie, savoir

$$(x^2+z^2)^2-4Lx^2-4L'z+8M''z+4P=0.$$

En tournant autour de oz, cette cyclique engendre la cyclide de révolution la plus générale

$$(x^2+y^2+z^2)^2 - 4L(x^2+y^2) - 4L''z^2 + 8M''z + 4P = 0.$$

On voit que les conditions $L = L'$, $M = M' = 0$ sont bien remplies. Ces conditions sont donc suffisantes et nécessaires.

Théorème IX — L'hypothèse $L = L' = L''$ donne les cyclides à déférentes sphériques. Elles sont toutes de révolution.

Nous avons déjà vu qu'on peut supposer alors $M = M' = 0$, mais que M'' ne peut être supposé nul sans entrainer décomposition. Les déférentes sont d'ailleurs des sphères représentées par l'équation

$$(L - \delta)(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) - \tau^2 = 0$$

La méridienne de la cyclide de révolution est, dans ce cas, un ovale de Descartes.

Je laisse au lecteur le soin de démontrer les lemmes suivants:

Lemme a — L'équation $g(\delta) = 0$ ne peut admettre de racine quadruple autre que L, L', L''; ni deux racines doubles sans que l'une au moins soit une des quantités L, L', L''.

Lemme b — Si L est racine triple de $g(\delta) = 0$, cette équation ne peut admettre en outre une racine double à moins que cette racine ne soit L' ou L''.

Lemme c — Si $L = L'$, L ne peut être racine triple de $g(\delta) = 0$ sans que la cyclide se décompose en deux sphères.

Toutes les hypothèses que ces lemmes n'interdisent pas sont admissibles et réalisables comme nous le verrons.

Dans le groupement et le classement de ces hypothèses je distingue trois cas bien différents, selon que $g(\delta) = 0$ admet ou non des racines multiples égales à l'une des quantités L, L', L''.

Cas A — Aucune des quantités L, L', L'' n'est racine multiple de $g(\delta) = 0$

Cas B — Une des quantités L, L', L'' est racine multiple de $g(\delta) = 0$

Cas C — Deux des quantités L, L', L'' sont racines multiples.

Ces divisions correspondent aux faits suivants. Cas A. Cyclides dont

toutes les déférentes sont superficielles et leurs inverses. Cas B. Cyclides qui admettent une déférente plane et leurs inverses. Cas C. Cyclides qui admettent deux déférentes planes et leurs inverses (cyclides de Dupin).

Je distinguerai aussi dans chaque cas selon que $g(S)$ a ou n'a pas de racines multiples autres que L, L', L''; selon qu'elle admet ou non comme racines simples une ou plusieurs des quantités L, L', L''; selon enfin que deux de ces mêmes quantités L, L', L'' sont égales ou même toutes égales. La considération des quantités L, L', L'' est donc un des bases de la discussion, celle des racines multiples autres que L, L', L'' est la seconde base.

Chaque cas est représentable par un symbole tel que

$$(S, S', S'', S''', S^{IV})$$

qui exprime que S, S', S'', S''', S^{IV} sont les cinq racines de $g(S) = 0$. On y adjoindra aussi, s'il y a lieu, la mention $L' = L$, ou $L' = L'' = L$.

Enumération des divers symboles possibles

Cas A

L, L', L'' distincts : symboles

$(S, S', S'', S''', S^{IV})$ (S, S', S'', S''', L) (S, S', S'', L, L') (S, S', L, L', L'').

(S, S, S', S'', S''') (S, S, S', S'', L) (S, S, S', L, L') (S, S, L, L', L'').

(S, S, S, S', S'') (S, S, S, S', L) (S, S, S, L, L')

Nous savons que le cas d'une racine quadruple autre que L, L', L'' et le cas de deux racines multiples toutes deux distinctes de $L, L' L''$ ne sont pas possible. (lemme a)

Soit maintenant $L' = L$, alors L est toujours racine : symboles

(L, S, S', S'', S''') (L, S, S', S'', L'')

(L, S, S, S', S'') (L, S, S, S', L'')

(L, S, S, S, S') (L, S, S, S, L'')

Il n'y a pas d'autre cas à considérer, d'après le lemme a. On ne peut même supposer $L = L' = L''$ car alors L est forcément racine double.

Cas B

L, L', L'' distincts : symboles

$(L, L, \delta, \delta', \delta'')$ $(L, L, \delta, \delta', L')$ (L, L, δ, L', L'')
$(L, L, L, \delta, \delta')$ (L, L, L, δ, L') (L, L, L, L', L'')
(L, L, L, L, δ) (L, L, L, L, L')
$(L, L, \delta, \delta, \delta')$ $(L, L, \delta, \delta, L')$
$(L, L, \delta, \delta, \delta)$

Nous savons que le symbole $(L, L, L, \delta, \delta)$ est impossible d'après le lemme b.

Soit maintenant L racine multiple et deux des quantités L, L', L'' égales. Il se peut ou bien que $L = L'$ soit racine multiple, ou bien que $L' = L''$ et L racine multiple.

Soit d'abord $L = L'$ racine multiple : symboles,

$(L, L, \delta, \delta', \delta'')$ $(L, L, \delta, \delta', L'')$
$(L, L, \delta, \delta, \delta')$ $(L, L, \delta, \delta, L'')$
$(L, L, \delta, \delta, \delta)$

Le cas de $L = L'$ racine triple ou quadruple est exclu par le lemme c.

Soit maintenant L racine multiple et $L' = L''$, L' est racine et l'on a les symboles

$(L, L', L', \delta, \delta')$
(L, L, L, L', δ)
(L, L, L, L, L')
$(L, L, L', \delta, \delta)$

Si enfin $L = L' = L''$, alors L est naturellement racine double et ne peut être racine triple (lemme c). De là ces symboles.

$(L, L, \delta, \delta', \delta'')$
$(L, L, \delta, \delta, \delta')$
$(L, L, \delta, \delta, \delta)$

Cas C.

Enfin, si deux des quantités L, L', L'' sont racines multiples on a les cas suivants.

D'abord L, L', L'' différents : symboles,

(L, L, L', L', S) $\quad$ (L, L, L', L', L'')

(L, L, L, L', L')

Soit maintenant $L' = L''$, on a les symboles

(L, L, L', L', S)

(L, L, L, L', L')

Le symbole (L, L, L'', L'', L'') est exclu par le lemme c. Enfin, dans le cas C on ne peut avoir évidemment $L = L' = L''$.

Nous avons ainsi énuméré tous les cas possibles. Nous allons montrer comment ils sont réalisés.

Observons d'abord qu'un type du cas A, un du cas B, un du cas C sont absolument irréductibles les uns aux autres par inversion, puisque dans le cas A aucune cyclide n'a ses lignes de courbure circulaires, que dans le cas B elles ont toutes une famille de lignes de courbure circulaires, et que dans le cas C les deux familles de lignes de courbure sont circulaires.

Ceci posé, nous allons parcourir tous les symboles compris dans l'un de ces trois types et réunir ensemble tous ceux que l'on peut ramener les uns aux autres par inversion. Nous disons des cyclides réductibles les uns aux autres par inversion qu'elles constituent un genre, chacune des cyclides du genre constituera une espèce.

Cas A

Premier genre (six espèces)

1° — $(S, S', S'', S''', S^{IV})$ — C'est le cas général, on l'obtient en associant à une déférente superficielle D quelconque (mais à centre, comme dans tout ce qui va suivre) une sphère quelconque Σ. Cinq anallagmaties.

2° — (S, S', S'', S''', L) — La sphère Σ a son centre dans un plan principal de D. Ce plan est un plan de symétrie de la cyclide. Quatre

anallagmaties. Caractère : M est nul

3° — (S, S', S'', L, L') — La sphère Σ a son centre sur un axe de D — Les deux plans principaux passant par cet axe sont des plans de symétrie. Trois anallagmaties. Caractère : $M = M' = 0$.

4° — (S, S', L, L', L'') — La sphère Σ est concentrique à la déférente. Les trois plans principaux de la déférente sont des plans de symétrie. Deux anallagmaties. Caractère : $M = M' = M'' = 0$.

5° — (S, S', S'', S''', L) et $L = L'$ — Cyclide à déférentes de révolution. Quatre anallagmaties et une symétrie. Les quatre axes des surfaces de révolution sont dans ce plan de symétrie, ainsi que les centres des sphères directrices.

(Nous prouverons que l'on engendre cette cyclide en prenant l'inverse de la cyclide générale par rapport à un point de l'une de ses focales) Caractère : $L = L'$, $M = 0$.

6° — (S, S', S'', L, L'') et $L = L'$ — Cyclide à déférentes de révolution ; mais à deux symétries. Il reste trois anallagmaties dans lesquelles le centre de la sphère directrice est dans le plan de l'équateur de la surface déférente.

(Même remarque que pour le cas précédent). Caractère $L = L'$ $M = M' = 0$.

Deuxième genre (six espèces)

1° — (S, S, S', S'', S''') — Cyclide à point double. Podaire de quadrique à centre ; inverse de quadrique. Une anallagmatie exceptionnelle qui compte double ; trois anallagmaties simples dans lesquelles la quadrique déférente est touchée par la sphère directrice. Caractère : une racine double.

2° — (S, S, S', S'', L) — Même cas que le précédent, mais avec une symétrie — Podaire de quadrique par rapport à un point d'un plan principal, ou inverse d'une quadrique par rapport à un point d'un plan principal. Une anallagmatie exceptionnelle qui compte double, une symétrie, et deux anallagmaties dans lesquelles la sphère directrice

touche la quadrique déférente en un point de l'une de ses sections principales. Caractère : racine double et $M=0$.

3°_ (S, S, S', L, L') ___ De même. Seulement le pôle d'inversion est sur un axe de la quadrique. Deux symétries ; une anallagmatie double, et une autre anallagmatie dans laquelle la déférente est touchée en un de ses sommets par la sphère directrice. Caractère : racine double et $M = M' = 0$.

4°_ (S, S, L, L', L'') ___ Podaire de quadrique par rapport à son centre, inverse de quadrique par rapport à son centre. Une anallagmatie double ; trois symétries, plus d'anallagmatie simple. Caractère : racine double et $M = M' = M'' = 0$; on a $P = 0$.

5°_ (S, S, S', S'', L) et $L = L'$ ___ Cyclide à point double et à déférente de révolution. Podaire de surface de révolution ; inverse d'une quadrique par rapport à un point d'une de ses focales. Une symétrie ; une anallagmatie double et deux anallagmaties simples, dans lesquelles la déférente, de révolution, est touchée par la sphère directrice. Caractère : $L = L'$ et une racine double.

6°_ (S, S, S', L'', L) et $L = L'$. ___ Cyclide à point double, à deux symétries et à déférente de révolution. Podaire d'une surface de révolution par rapport à un point du plan de son équateur. Inverse d'une quadrique par rapport à un foyer d'une de ses sections principales. Deux symétries ; une anallagmatie double, et une anallagmatie simple, dans laquelle la sphère directrice touche la déférente de révolution en un point de son équateur.

(Nous verrons que ces espèces 5 et 6 dérivent par inversion de la cyclide générale à point double) Caractère : $L = L'$, $M = M' = 0$, et une racine double.

Troisième genre (cinq espèces)

1°_ (S, S, S, S', S'') ___ Cyclide à point double avec cône décomposé. Podaire

de quadrique à centre par rapport à un de ses points ; inverse de paraboloïde Une anallagmatie triple exceptionnelle ; deux anallagmaties simples, dans lesquelles la déférente est coupée par la sphère directrice suivant une cyclique à rebroussement. Caractère : racine triple.

2°_ (S, S, S, S', L) — La même chose, mais une symétrie en plus. Podaire d'une quadrique à centre par rapport à un point d'une section principale ; inverse d'un paraboloïde par rapport à un point d'un plan principal. Une symétrie ; une anallagmatie triple, et une simple, dans laquelle la déférente est touchée par la sphère directrice en un point d'une section principale, avec rebroussement de la cyclique d'intersection. Caractère : racine triple et M = 0.

3°_ (S, S, S, L, L') — La même chose, mais avec deux symétries, et plus d'anallagmatie simple. Podaire de quadrique à centre par rapport à un sommet ; inverse de paraboloïde par rapport à un point de l'axe. Caractère : racine triple et M = M' = 0.

4°_ (L, S, S, S, S') avec L' = L. — Podaire d'une quadrique de révolution par rapport à l'un de ses points ; inverse d'un paraboloïde par rapport à un point de l'une de ses focales. Un plan de symétrie ; une anallagmatie triple une anallagmatie simple dans laquelle la déférente est de révolution et est coupée par la sphère directrice suivant une cyclique à rebroussement. Caractère : racine triple L' = L.

5°_ (L, S, S, S, L") avec L' = L — Podaire d'une quadrique de révolution par rapport à un point du parallèle équatorial ; inverse d'un paraboloïde par rapport au foyer d'une section principale. Deux symétries ; une anallagmatie triple. Caractère : racine triple : M = M' = 0.

Cas B _ Cyclide à lignes de courbures circulaires, pour une famille.

Premier genre (Sept espèces)

1°_ (L, L , S, S', S") — Type général des cyclides à déférente curviligne. Inverse

Roc. N° 25

de cône ; podaire de quadrique. Deux points doubles. Trois anallagmaties doubles dans lesquelles la sphère directrice est bi-tangente à la quadrique déférente les deux points de contact sont les points doubles. Deux symétries. Caractère : L racine double.

2°_(L, L, S, S', L') ___ La même chose, mais avec une symétrie de plus. Inverse de cône par rapport à un point d'un plan principal. Podaire de conique par rapport à un point de l'un des deux plans de symétrie (pas du plan de la conique). Deux anallagmaties dans lesquelles la sphère directrice touche la déférente en deux points d'une section principale. Deux symétries. Caractère : L racine double et M' = M = 0.

3°_ (L, L, S, L', L") . ___ La même chose encore mais avec deux symétries de plus que pour la première espèce. Inverse de cône par rapport à un point de son axe. Podaire de conique par rapport à un point de la normale élevée en son centre à son plan. Trois symétries, une anallagmatie simple dans laquelle la sphère directrice est concentrique et bi-tangente à la déférente. Caractère : M = M" = M" = 0

4°_(L, L, S, S', S") avec L' = L ___ Surface cyclide de révolution la plus générale. Trois déférentes de révolution, autour du même axe ; les sphères directrices ont leurs centres sur cet axe. Caractère : L = L', M = M' = 0.

5°_(L, L, S, S, L") avec L' = L ___ Surface cyclide de révolution, mais avec un plan de symétrie. Deux anallagmaties dans lesquelles les déférentes sont de révolution et concentriques aux sphères directrices. Caractère : M = M' = M" avec L' = L.

6°_(L, L, L', S, S') avec L' = L" ___ C'est l'espèce 1 de ce même genre, mais dans laquelle les déférentes sont de révolution, et la déférente plane est un cercle. Nous avons donc une cyclide à déférente circulaire ; podaire d'un cercle inverse d'un cône du second degré par rapport à un point d'une de ses focales. Deux symétries et deux anallagmaties dans lesquelles la déférente est de révolution et est bi-tangente à la sphère directrice. La sphère directrice coupe la déférente suivant deux paraboles tangentes au cercle de l'infini.

Caractère $L''=L'$, L racine double.

7°_ (L, L, S, S', S'') et $L=L'=L''$ ___ Cyclide de révolution; trois anallagmaties à déférente sphérique. Caractère : $L=L'=L''$. Les méridiennes sont des ovales de Descartes.

Deuxième genre. (Quatre espèces).

1°_ (L, L, L, S, S') ___ Cyclide podaire de conique par rapport à un point de son plan, et inverse d'un cylindre à centres du second degré. Deux anallagmaties ; la déférente est coupée par la sphère directrice suivant deux cercles tangents entre eux. C'est la première espèce (L, L, S, S', S'') du premier genre, dans laquelle les points doubles coïncident. Caractère : L racine triple.

2°_ (L, L, L, S, L') ___ Cyclide podaire de conique par rapport à un point d'un de ses axes. Inverse d'un cylindre à centres par rapport à un point de l'un des deux plans principaux. Une seule anallagmatie, dans laquelle la sphère directrice coupe la déférente suivant deux cercles qui se coupent en un sommet de la déférente. Caractère : L racine triple et $M'=0$.

3°_ (L, L, L, L', L'') ___ Cyclide podaire de conique par rapport à son centre. Inverse de cylindre par rapport à un de ses centres. Plus d'anallagmatie, mais trois symétries. Caractères : $M=M'=M''=0$, $L=P=0$.

4°_ (L, L, L, L', S) avec $L''=L'$ ___ Cyclide à déférente circulaire et à déférente de révolution. Podaire d'un cercle par rapport à un point de son plan. Inverse d'un cylindre par rapport à un point de l'une de ses focales. Deux symétries et une anallagmatie dans laquelle la sphère directrice coupe la déférente, de révolution, suivant deux paraboles tangentes au cercle de l'infini et tangentes entre elles dans le plan de l'équateur.

---

d'un paramètre, seulement ici la déférente se réduit à l'axe de révolution. Le théorème IV est donc encore vrai dans ce cas. Ce cas n'est pas du reste bien différent de cas général, puisque une inversion suffit, nous le savons, pour ramener une cyclique de révolution à une cyclide à deux points doubles et inverse ment.

Dans tous les cas, et c'est là un fait important l'hypothèse de L racine double de $g(S)=0$ correspond exactement à une cyclide à lignes de courbures circulaires.

Théorème V — Si L est une racine triple de $g(S)=0$, les points o_1, o_2 coïncident, la cyclide est l'inverse d'un cylindre et la podaire d'une conique par rapport à un point de son plan.

Montrons d'abord que L ne peut être égal à L' dans cette hypothèse sans qu'il y ait décomposition. Si $L=L'$ est racine multiple de $g(S)$ on peut supposer toujours, nous le savons $M=M'=0$; on a donc

$$g(S)=\left[(P-S^2)(L''-S)+M''^2\right](L-S)^8.$$

Si L est racine triple de $g(S)=0$, on a

$$(P-L^2)(L''-L)+M''^2=0.$$

Si l'on avait $L''=L$, il faudrait avoir aussi $M''=0$ et la cyclide se composerait de deux sphères concentriques.

Si $L''-L$ n'est pas nul, on peut écrire

$$P-L^2+\frac{M''^2}{L''-L}=0$$

et l'équation de la cyclide s'écrit

$$(x^2+y^2+z^2-2L)^2-4(L''-4)\left(z-\frac{M''}{L''-L}\right)^2=0$$

forme qui marque bien encore une décomposition en deux sphères.

Supposons donc L racine triple de $g(S)=0$, mais distinct de L' et L''. La coïncidence des points o, o_1 s'exprime justement par l'équation

$$\alpha^2=-f_1'(L)=0,$$

qui exprime que L est racine double de $f_1(\delta)=0$, et, par suite, racine triple de $g(\delta)=0$; le point O_1 est venu se confondre avec O_2 ; son inverse, sommet du cône inverse de la cyclide est donc à l'infini ; ce cône est devenu un cylindre. On peut le voir autrement.

D_1, la conique dont la cyclide est la podaire par rapport au point O_1, est l'homothétique de la déférente D autour du point O_1, lequel est dans le plan de D. Donc D_1 est dans le plan de D. La cyclide est donc la podaire d'une conique D_1 par rapport à un point O_1 de son plan. Or le cône inverse de la cyclide est la polaire réciproque de D_1 par rapport à une sphère dont O_2 est le centre. Puisque le plan de D_1 passe au centre de cette sphère, le pôle de ce plan, sommet du cône, est à l'infini ; le cône est devenu un cylindre.

Théorème VI — Si L est racine quadruple de $g(\delta)=0$, le point O_1 du théorème précédent est sur la déférente D_1, la cyclide est la podaire d'une conique par rapport à un de ses points, et l'inverse d'un cylindre parabolique.

En effet, les coordonnées du point O_1 sont

$$\alpha=0, \qquad \beta=\frac{M'}{L'-L} \qquad \gamma=\frac{M''}{L''-L};$$

l'équation de D_1 dans le plan $x=0$ s'écrit

$$\frac{y^2}{L'-L}+\frac{z^2}{L''-L}-1=0,$$

et en substituant les coordonnées du point O on trouve

$$\frac{M'^2}{(L'-L)^3}+\frac{M''^2}{(L''-L)^3}-1=-\frac{1}{2}f_1''(L)$$

Pour que le point O_1 soit sur D_1 il faut donc, et il suffit que $f_1''(L)=0$, c'est-à-dire que L soit racine triple de $f_1(\delta)=0$, et, en conséquence, quadruple de $g(\delta)=0$.

Le point O_1 étant sur D_1 est aussi sur son homothétique D_1' ; la cyclide est donc la podaire de la conique D_1' par rapport à l'un de ses

points. La polaire réciproque de D_1 par rapport à une sphère de centre O_1 sera d'abord un cylindre, puisque le plan de D_1 passe par le point O_1 et en second lieu un cylindre parabolique (tangent au plan de l'infini) puisque la conique D_1 passe au point O_1. La cyclide est donc l'inverse d'un cylindre parabolique.

Remarque. — Il n'est pas possible que L soit racine quintuple de $q(\delta)=0$, car $f_1(\delta)=0$ ne peut avoir de racine quadruple, attendu que $f_1'''(\delta)$ est essentiellement négatif.

Remarque — Il résulte des calculs précédents que si une cyclide admet une déférente curviligne et puis d'autres déférentes non curvilignes, ces quadriques admettent pour focale la conique déférente.

De même, si une cyclide admet deux déférentes curvilignes, ces deux coniques sont focales l'une de l'autre. C'est le cas de la cyclide de Dupin.

Théorème VII — Si $L=L'$ (et alors on peut faire $M=0$) la cyclide admet comme déférentes des surfaces de révolution, et réciproquement.

Ce théorème résulte de l'équation même des déférentes

$$(L-\delta)(\xi^2+\eta^2)+(L''-\delta)\zeta^2-\tau^2=0$$

Théorème VIII — Si $L=L'$ et $M=M'=0$ la cyclide est de révolution, et réciproquement, ces conditions sont nécessaires pour que la cyclide soit de révolution.

Nous avons déjà vu la proposition directe. Reste sa réciproque qui fixe le type général des cyclides de révolution. On peut faire le raisonnement suivant : toute cyclide est coupée par un plan suivant une quartique bi-circulaire, c'est-à-dire, suivant une cyclique.

En particulier un plan méridien d'une cyclide de révolution la coupe suivant une cyclique ; de plus, cette cyclique admet évidemment pour axe de symétrie l'axe oz. Nous formerons donc l'équation générale des cycliques tracées dans le plan des xz et qui admettent oz pour axe de symétrie, savoir

$$(x^2+z^2)^2-4Lx^2-4L'z+8M''z+4P=0.$$

En tournant autour de oz, cette cyclique engendre la cyclide de révolution la plus générale

$$(x^2+y^2+z^2)^2 - 4L(x^2+y^2) - 4L''z^2 + 8M''z + 4P = 0.$$

On voit que les conditions $L = L'$, $M = M' = 0$ sont bien remplies. Ces conditions sont donc suffisantes et nécessaires.

Théorème IX — L'hypothèse $L = L' = L''$ donne les cyclides à déférentes sphériques. Elles sont toutes de révolution.

Nous avons déjà vu qu'on peut supposer alors $M = M' = 0$, mais que M'' ne peut être supposé nul sans entrainer décomposition. Les déférentes sont d'ailleurs des sphères représentées par l'équation

$$(L - \delta)(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) - \tau^2 = 0$$

La méridienne de la cyclide de révolution est, dans ce cas, un ovale de Descartes.

Je laisse au lecteur le soin de démontrer les lemmes suivants:

Lemme a — L'équation $g(S) = 0$ ne peut admettre de racine quadruple autre que L, L', L''; ni deux racines doubles sans que l'une au moins soit une des quantités L, L', L''.

Lemme b — Si L est racine triple de $g(\delta) = 0$, cette équation ne peut admettre en outre une racine double à moins que cette racine ne soit L' ou L''.

Lemme c — Si $L = L'$, L ne peut être racine triple de $g(\delta) = 0$ sans que la cyclide se décompose en deux sphères.

Toutes les hypothèses que ces lemmes n'interdisent pas sont admissibles et réalisables comme nous le verrons.

Dans le groupement et le classement de ces hypothèses je distingue trois cas bien différents, selon que $g(\delta) = 0$ admet ou non des racines multiples égales à l'une des quantités L, L', L''.

Cas A — Aucune des quantités L, L', L'' n'est racine multiple de $g(\delta) = 0$

Cas B — Une des quantités L, L', L'' est racine multiple de $g(\delta) = 0$

Cas C — Deux des quantités L, L', L'' sont racines multiples.

Ces divisions correspondent aux faits suivants. Cas A. Cyclides dont

toutes les déférentes sont superficielles et leurs inverses. Cas B. Cyclides qui admettent une déférente plane et leurs inverses. Cas C. Cyclides qui admettent deux déférentes planes et leurs inverses (cyclides de Dupin).

Je distinguerai aussi dans chaque cas selon que $g(S)$ a ou n'a pas de racines multiples autres que L, L', L''; selon qu'elle admet ou non comme racines simples une ou plusieurs des quantités L, L', L''; selon enfin que deux de ces mêmes quantités L, L', L'' sont égales ou même toutes égales. La considération des quantités L, L', L'' est donc un des bases de la discussion, celle des racines multiples autres que L, L', L'' est la seconde base.

Chaque cas est représentable par un symbole tel que

$$(S, S', S'', S''', S^{IV})$$

qui exprime que S, S', S'', S''', S^{IV} sont les cinq racines de $g(S) = 0$. On y adjoindra aussi, s'il y a lieu, la mention $L' = L$, ou $L' = L'' = L$.

Enumération des divers symboles possibles

Cas A

L, L', L'' distincts : symboles

$(S, S', S'', S''', S^{IV})$ (S, S', S'', S''', L) (S, S', S'', L, L') (S, S', L, L', L'').

(S, S, S', S'', S''') (S, S, S', S'', L) (S, S, S', L, L') (S, S, L, L', L'').

(S, S, S, S', S'') (S, S, S, S', L) (S, S, S, L, L')

Nous savons que le cas d'une racine quadruple autre que L, L', L'' et le cas de deux racines multiples toutes deux distinctes de $L, L' L''$ ne sont pas possible. (lemme a)

Soit maintenant $L' = L$, alors L est toujours racine : symboles

(L, S, S', S'', S''') (L, S, S', S'', L'')

(L, S, S, S', S'') (L, S, S, S', L'')

(L, S, S, S, S') (L, S, S, S, L'')

Il n'y a pas d'autre cas à considérer, d'après le lemme a. On ne peut même supposer $L = L' = L''$ car alors L est forcément racine double.

Cas B

L, L', L'' distincts : symboles

$(L, L, \delta, \delta', \delta'')$ $(L, L, \delta, \delta', L')$ (L, L, δ, L', L'')
$(L, L, L, \delta, \delta')$ (L, L, L, δ, L') (L, L, L, L', L'')
(L, L, L, L, δ) (L, L, L, L, L')
$(L, L, \delta, \delta, \delta')$ $(L, L, \delta, \delta, L')$
$(L, L, \delta, \delta, \delta)$

Nous savons que le symbole $(L, L, L, \delta, \delta)$ est impossible d'après le lemme b.

Soit maintenant L racine multiple et deux des quantités L, L', L'' égales. Il se peut ou bien que $L = L'$ soit racine multiple, ou bien que $L' = L''$ et L racine multiple.

Soit d'abord $L = L'$ racine multiple : symboles,

$(L, L, \delta, \delta', \delta'')$ $(L, L, \delta, \delta', L'')$
$(L, L, \delta, \delta, \delta')$ $(L, L, \delta, \delta, L'')$
$(L, L, \delta, \delta, \delta)$

Le cas de $L = L'$ racine triple ou quadruple est exclu par le lemme c.

Soit maintenant L racine multiple et $L' = L''$, L' est racine et l'on a les symboles

$(L, L', L', \delta, \delta')$
(L, L, L, L', δ)
(L, L, L, L, L')
$(L, L, L', \delta, \delta)$

Si enfin $L = L' = L''$, alors L est nativellement racine double et ne peut être racine triple (lemme c). De là ces symboles.

$(L, L, \delta, \delta', \delta'')$
$(L, L, \delta, \delta, \delta')$
$(L, L, \delta, \delta, \delta)$

Cas C.

Enfin, si deux des quantités L, L', L'' sont racines multiples on a les cas suivants.

D'abord L, L', L'' différents : symboles,

(L, L, L', L', S) $\quad$ (L, L, L', L', L'')

(L, L, L, L', L')

Soit maintenant $L' = L''$, on a les symboles

(L, L, L', L', S)

(L, L, L, L', L')

Le symbole (L, L, L'', L'', L'') est exclu par le lemme c. Enfin, dans le cas C on ne peut avoir évidemment $L = L' = L''$.

Nous avons ainsi énuméré tous les cas possibles. Nous allons montrer comment ils sont réalisés.

Observons d'abord qu'un type du cas A, un du cas B, un du cas C sont absolument irréductibles les uns aux autres par inversion, puisque dans le cas A aucune cyclide n'a ses lignes de courbure circulaires, que dans le cas B elles ont toutes une famille de lignes de courbure circulaires, et que dans le cas C les deux familles de lignes de courbure sont circulaires.

Ceci posé, nous allons parcourir tous les symboles compris dans l'un de ces trois types et réunir ensemble tous ceux que l'on peut ramener les uns aux autres par inversion. Nous disons des cyclides réductibles les uns aux autres par inversion qu'elles constituent un genre, chacune des cyclides du genre constituera une espèce.

Cas A

Premier genre (six espèces)

1° — $(S, S', S'', S''', S^{IV})$ — C'est le cas général, on l'obtient en associant à une déférente superficielle D quelconque (mais à centre, comme dans tout ce qui va suivre) une sphère quelconque Σ. Cinq anallagmaties.

2° — (S, S', S'', S''', L) — La sphère Σ a son centre dans un plan principal de D. Ce plan est un plan de symétrie de la cyclide. Quatre

anallagmaties. Caractère : M est nul

3° — (S, S', S'', L, L') — La sphère Σ a son centre sur un axe de D — Les deux plans principaux passant par cet axe sont des plans de symétrie. Trois anallagmaties. Caractère : $M = M' = 0$.

4° — (S, S', L, L', L'') — La sphère Σ est concentrique à la déférente. Les trois plans principaux de la déférente sont des plans de symétrie. Deux anallagmaties. Caractère : $M = M' = M'' = 0$.

5° — (S, S', S'', S''', L) et $L = L'$ — Cyclide à déférentes de révolution. Quatre anallagmaties et une symétrie. Les quatre axes des surfaces de révolution sont dans ce plan de symétrie, ainsi que les centres des sphères directrices.

(Nous prouverons que l'on engendre cette cyclide en prenant l'inverse de la cyclide générale par rapport à un point de l'une de ses focales) Caractère : $L = L'$, $M = 0$.

6° — (S, S', S'', L, L'') et $L = L'$ — Cyclide à déférentes de révolution, mais à deux symétries. Il reste trois anallagmaties dans lesquelles le centre de la sphère directrice est dans le plan de l'équateur de la surface déférente.

(Même remarque que pour le cas précédent). Caractère $L = L'$ $M = M' = 0$.

Deuxième genre (six espèces)

1° — (S, S, S', S'', S''') — Cyclide à point double. Podaire de quadrique à centre ; inverse de quadrique. Une anallagmatie exceptionnelle qui compte double ; trois anallagmaties simples dans lesquelles la quadrique déférente est touchée par la sphère directrice. Caractère : une racine double.

2° — (S, S, S', S'', L) — Même cas que le précédent, mais avec une symétrie — Podaire de quadrique par rapport à un point d'un plan principal, ou inverse d'une quadrique par rapport à un point d'un plan principal. Une anallagmatie exceptionnelle qui compte double, une symétrie, et deux anallagmaties dans lesquelles la sphère directrice

touche la quadrique déférente en un point de l'une de ses sections principales. Caractère : racine double et $M=0$.

3°— (S, S, S', L, L') — De même. Seulement le pôle d'inversion est sur un axe de la quadrique. Deux symétries ; une anallagmatie double, et une autre anallagmatie dans laquelle la déférente est touchée en un de ses sommets par la sphère directrice. Caractère : racine double et $M = M' = 0$.

4°— (S, S, L, L', L'') — Podaire de quadrique par rapport à son centre, inverse de quadrique par rapport à son centre. Une anallagmatie double ; trois symétries, plus d'anallagmatie simple. Caractère : racine double et $M = M' = M'' = 0$; on a $P = 0$.

5°— (S, S, S', S'', L) et $L = L'$ — Cyclide à point double et à déférente de révolution. Podaire de surface de révolution ; inverse d'une quadrique par rapport à un point d'une de ses focales. Une symétrie ; une anallagmatie double et deux anallagmaties simples, dans lesquelles la déférente, de révolution, est touchée par la sphère directrice. Caractère : $L = L'$ et une racine double.

6°— (S, S, S', L'', L) et $L = L'$. — Cyclide à point double, à deux symétries et à déférente de révolution. Podaire d'une surface de révolution par rapport à un point du plan de son équateur. Inverse d'une quadrique par rapport à un foyer d'une de ses sections principales. Deux symétries ; une anallagmatie double, et une anallagmatie simple, dans laquelle la sphère directrice touche la déférente de révolution en un point de son équateur.

(Nous verrons que ces espèces 5 et 6 dérivent par inversion de la cyclide générale à point double) Caractère : $L = L'$, $M = M' = 0$, et une racine double.

Troisième genre (cinq espèces)

1°— (S, S, S, S', S'') — Cyclide à point double avec cône décomposé. Podaire

de quadrique à centre par rapport à un de ses points ; inverse de paraboloïde Une anallagmatie triple exceptionnelle ; deux anallagmaties simples, dans lesquelles la déférente est coupée par la sphère directrice suivant une cyclique à rebroussement. Caractère : racine triple.

2°_ (S, S, S, S', L) — La même chose, mais une symétrie en plus. Podaire d'une quadrique à centre par rapport à un point d'une section principale ; inverse d'un paraboloïde par rapport à un point d'un plan principal. Une symétrie ; une anallagmatie triple, et une simple, dans laquelle la déférente est touchée par la sphère directrice en un point d'une section principale, avec rebroussement de la cyclique d'intersection. Caractère : racine triple et $M = 0$.

3°_ (S, S, S, L, L') — La même chose, mais avec deux symétries, et plus d'anallagmatie simple. Podaire de quadrique à centre par rapport à un sommet ; inverse de paraboloïde par rapport à un point de l'axe. Caractère : racine triple et $M = M' = 0$.

4°_ (L, S, S, S, S') avec L' = L. — Podaire d'une quadrique de révolution par rapport à l'un de ses points ; inverse d'un paraboloïde par rapport à un point de l'une de ses focales. Un plan de symétrie ; une anallagmatie triple une anallagmatie simple dans laquelle la déférente est de révolution et est coupée par la sphère directrice suivant une cyclique à rebroussement. Caractère : racine triple L' = L.

5°_ (L, S, S, S, L") avec L' = L — Podaire d'une quadrique de révolution par rapport à un point du parallèle équatorial ; inverse d'un paraboloïde par rapport au foyer d'une section principale. Deux symétries ; une anallagmatie triple. Caractère : racine triple : $M = M' = 0$.

Cas B _ Cyclide à lignes de courbures circulaires, pour une famille.

Premier genre (Sept espèces)

1°_ (L, L , S, S', S") — Type général des cyclides à déférente curviligne. Inverse

Roc N° 25

de cône ; podaire de quadrique. Deux points doubles. Trois anallagmaties doubles dans lesquelles la sphère directrice est bi-tangente à la quadrique déférente. Les deux points de contact sont les points doubles. Deux symétries. Caractère : L racine double.

2°_(L, L, S, S', L') ___ La même chose, mais avec une symétrie de plus. Inverse de cône par rapport à un point d'un plan principal. Podaire de conique par rapport à un point de l'un des deux plans de symétrie (pas du plan de la conique). Deux anallagmaties dans lesquelles la sphère directrice touche la déférente en deux points d'une section principale. Deux symétries. Caractère : L racine double et M' = M = 0.

3°_ (L, L, S, L', L") . ___ La même chose encore mais avec deux symétries de plus que pour la première espèce. Inverse de cône par rapport à un point de son axe. Podaire de conique par rapport à un point de la normale élevée en son centre à son plan. Trois symétries, une anallagmatie simple dans laquelle la sphère directrice est concentrique et bi-tangente à la déférente. Caractère : M = M" = M" = 0

4°_(L, L, S, S', S") avec L' = L ___ Surface cyclide de révolution la plus générale. Trois déférentes de révolution, autour du même axe ; les sphères directrices ont leurs centres sur cet axe. Caractère : L = L', M = M' = 0.

5°_(L, L, S, S, L") avec L' = L ___ Surface cyclide de révolution, mais avec un plan de symétrie. Deux anallagmaties dans lesquelles les déférentes sont de révolution et concentriques aux sphères directrices. Caractère : M = M' = M" avec L' = L.

6°_(L, L, L', S, S') avec L' = L" ___ C'est l'espèce 1 de ce même genre, mais dans laquelle les déférentes sont de révolution, et la déférente plane est un cercle. Nous avons donc une cyclide à déférente circulaire ; podaire d'un cercle inverse d'un cône du second degré par rapport à un point d'une de ses focales. Deux symétries et deux anallagmaties dans lesquelles la déférente est de révolution et est bi-tangente à la sphère directrice. La sphère directrice coupe la déférente suivant deux paraboles tangentes au cercle de l'infini.

Caractère $L''=L'$, L racine double.

7°_ (L, L, S, S', S'') et $L=L'=L''$ ___ Cyclide de révolution; trois anallagmaties à déférente sphérique. Caractère : $L=L'=L''$. Les méridiennes sont des ovales de Descartes.

Deuxième genre. (Quatre espèces).

1°_ (L, L, L, S, S') ___ Cyclide podaire de conique par rapport à un point de son plan, et inverse d'un cylindre à centres du second degré. Deux anallagmaties ; la déférente est coupée par la sphère directrice suivant deux cercles tangents entre eux. C'est la première espèce (L, L, S, S', S'') du premier genre, dans laquelle les points doubles coïncident. Caractère : L racine triple.

2°_ (L, L, L, S, L') ___ Cyclide podaire de conique par rapport à un point d'un de ses axes. Inverse d'un cylindre à centres par rapport à un point de l'un des deux plans principaux. Une seule anallagmatie, dans laquelle la sphère directrice coupe la déférente suivant deux cercles qui se coupent en un sommet de la déférente. Caractère : L racine triple et $M'=0$.

3°_ (L, L, L, L', L'') ___ Cyclide podaire de conique par rapport à son centre. Inverse de cylindre par rapport à un de ses centres. Plus d'anallagmatie, mais trois symétries. Caractères : $M=M'=M''=0$, $L=P=0$.

4°_ (L, L, L, L', S) avec $L''=L'$ ___ Cyclide à déférente circulaire et à déférente de révolution. Podaire d'un cercle par rapport à un point de son plan. Inverse d'un cylindre par rapport à un point de l'une de ses focales. Deux symétries et une anallagmatie dans laquelle la sphère directrice coupe la déférente, de révolution, suivant deux paraboles tangentes au cercle de l'infini et tangentes entre elles dans le plan de l'équateur.

Troisième genre (3 espèces).

1°_ (L, L, L, L, S) ___ Cyclide podaire d'une conique à centre par rapport à un de ses points, et inverse d'un cylindre parabolique. Une anallagmatie dans laquelle la sphère directrice coupe la déférente suivant deux cercles tangents entre eux en un ombilic. Caractère: L racine quadruple.

2°_ (L, L, L, L, L') ___ Cyclide podaire d'une conique par rapport à l'un de ses sommets. Inverse d'un cylindre parabolique par rapport à un point de son plan diamétral principal. Caractère: L racine quadruple et M' = 0.

3°_ (L, L, L, L, L') avec L' = L''. ___ Cyclide podaire d'un cercle par rapport à un de ses points, et inverse d'un cylindre parabolique par rapport à un point de sa droite focale. Caractère: L racine quadruple et L'' = L'.

Quatrième genre (six espèces).

1°_ (L, L, S, S, S') ___ Cyclide inverse d'une quadrique de révolution, et podaire d'une autre quadrique par rapport à un point de l'une de ses focales. Une anallagmatie double et une autre simple dans laquelle la déférente est coupée par la sphère directrice suivant deux cercles dont l'un de rayon nul. Le centre de ce dernier est le pôle de l'anallagmatie double; les points où le cercle de rayon nul coupe l'autre cercle sont deux autres points doubles de la cyclide, qui admet ainsi trois points doubles. Caractère: deux racines doubles, dont l'une est L.

2°_ (L, L, S, S, L') ___ Cyclide inverse d'une quadrique de révolution par rapport à un point du plan de son équateur, et podaire d'une autre quadrique par rapport à un foyer d'une section principale. Plus d'anallagmatie simple. Caractère: comme le cas précédent, et en plus M' = 0

3°_ (L, L, S, S, S') et L = L' ___ Cyclide de révolution à point double. Podaire et inverse de deux surfaces de révolution autour d'un même axe, par rapport à un point de cet axe. Une anallagmatie dans laquelle la déférente

est touchée par la sphère directrice en un de ses sommets. Caractère : deux racines doubles, dont L et en outre $L = L'$.

4°_ $(L, L, \delta, \delta, L'')$ et $L = L''$ ___ Plus d'anallagmatie simple. Podaire d'une quadrique de révolution par rapport à son centre, et inverse d'une quadrique concentrique à la première. Caractère : comme la seconde espèce, mais en outre $L = L'$

5°_ $(L, L, L', \delta, \delta)$ et $L' = L''$. ___ Podaire d'une quadrique de révolution par rapport à un point de son cercle focal ; inverse d'une autre quadrique de révolution par rapport à un point de son cercle focal.

6°_ $(L, L, \delta, \delta, \delta')$ et $L = L' = L''$ ___ Cyclide de révolution. Une anallagmatie à déférente sphérique. La déférente touche la sphère directrice. Une anallagmatie double. Inverse d'une quadrique de révolution par rapport à un de ses deux foyers ; podaire d'une sphère : caractère : $L = L' = L''$ et racine double.

Cinquième genre (trois espèces)

1°_ $(L, L, \delta, \delta, \delta)$ ___ Inverse d'un paraboloïde de révolution et podaire d'une quadrique par rapport à un de ses ombilics.

2°_ $(L, L, \delta, \delta, \delta)$ avec $L = L'$ ___ Podaire d'une quadrique de révolution par rapport à un de ses sommets, et inverse d'un paraboloïde de révolution par rapport à un point de son axe. Cyclide de révolution.

3°_ $(L, L, \delta, \delta, \delta)$ $L = L' = L''$ ___ Podaire d'une sphère par rapport à un de ses points ; inverse d'un paraboloïde de révolution par rapport à son foyer. Plus d'anallagmatie.

Cas C _ Toute ligne de courbure est circulaire.

Premier genre (trois espèces).

1°_ (L, L, L', L', δ) ___ Deux déférentes curvilignes focales l'une de l'autre. Inverse d'un cône de révolution ; podaire d'une conique par rapport à un

point d'une focale. Une anallagmatie dans laquelle la déférente et la sphère directrice sont concentriques et se coupent suivant deux cercles de rayon nul. Elles sont tangentes en 4 points et ces points sont des points doubles de la cyclide. C'est la cyclide de Dupin.

2°_ (L, L, L', L', L'') ___ Plus d'anallagmatie ; podaire d'une conique par rapport à un point où la perpendiculaire en son centre à son plan coupe une focale. Inverse d'un cône de révolution par rapport à un point de son équateur.

3°_ (L, L, L'', L$^\infty$, S) et L' = L ___ C'est le tore. Inverse d'un cône de révolution par rapport à un point de son axe, podaire d'un cercle par rapport à un point de son axe. Une anallagmatie, dans laquelle la sphère directrice touche la déférente (qui est de révolution) en ses deux sommets.

Second genre (deux espèces)

1°_ (L, L, L, L', L') ___ Deux déférentes planes focales l'une de l'autre. Deux des quatre points doubles coïncident. Podaire d'une conique par rapport à un de ses foyers. Inverse d'un cylindre de révolution. Pas d'anallagmatie.

2°_ (L, L, L, L', L') avec L' = L'' ___ Cyclide de révolution. Tore engendré par la rotation d'un cercle autour d'une de ses tangentes. Podaire d'un cercle par rapport à son centre, inverse d'un cylindre de révolution par rapport à un point de son axe

---

Cyclides cubiques

Lorsque la déférente touche le plan de l'infini est du troisième ordre seulement. Prenons, pour origine le milieu du segment compris sur l'axe de la déférente, entre les deux foyers des paraboles principales, et pour plan des xoz et xoy les plans principaux. L'équation tangentielle de la quadrique xra

$$p\eta^2 + q\xi^2 - 2\xi(\tau + h\xi) = 0,$$

et son équation ponctuelle.

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} - 4(x-h) = 0;$$

seulement si p ou q sont nuls, la quadrique se réduit à une parabole.

Maintenant, en égard au choix de l'origine on a

$$h = -\frac{p+q}{4}$$

et la distance des foyers à l'origine est $\pm\frac{q-p}{2}$.

L'équation de la cyclide s'écrit dès lors (p. 118)

$$p(y-\beta)^2 + q(z-\gamma)^2 - 2(x-\alpha)\left\{2\delta - \overline{x^2+y^2+z^2} + 2h\overline{x-\alpha}\right\}$$

On reconnait ainsi que le pôle d'anallagmatie (α, β, γ) se trouve sur la cyclide.

Développons, il vient

$$(x^2+y^2+z^2)x$$
$$-(2h+\alpha)x^2 + (p-\alpha)y^2 + (q-\alpha)z^2$$
$$-2(\delta - 2h\alpha)x - 2p\beta y - 2q\gamma z + (p\beta^2 + q\gamma^2 + 2\alpha\delta - 2h\alpha^2) = 0$$

Toute surface cubique circulaire peut être ramenée à cette forme, et d'une seule manière.

En effet, toute surface cubique circulaire a une équation de la forme.

$$(x^2+y^2+z^2)(lx+my+nz) + \theta(x,y,z) = 0,$$

où θ est un polynôme en x, y, z du second degré, ainsi que les polynômes que j'aurai à désigner plus tard par $\theta_1, \theta_2, \ldots$.

En prenant le plan $x=0$ parallèle au plan $lx+my+nz=0$, nous aurons d'abord la forme la plus simple

$$(x^2+y^2+z^2)x + \theta_1(x,y,z) = 0$$

Soit

$$\Psi(x,y,z) = Ax' + A'y' + A''z' + 2By z + 2B'zx + 2B''xy.$$

l'ensemble des termes du second degré dans $\theta_1(x,y,z)$; effectuons un transport d'origine en remplaçant x, y, z par $a+x'$, $b+y'$, $c+z'$ il viendra en n'écrivant que les termes du troisième et du second degré

$$(x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz)x + a(x^2+y^2+z^2) + \Psi(x,y,z) + \ldots.$$

c'est-à-dire,

$$(x^2+y^2+z^2)x+\psi_1(x,y,z)+\ldots\ldots$$

où

$$\psi_1(x,y,z)=(A+3a)x^2+(A'+a)y^2+(A''+a)z^2$$
$$+2By\,z+2(B'+c)zx+z(B''+b)xy;$$

si l'on prend $b=-B''$, $c=-B'$ on voit que les termes en zx et xy disparaissent. Ensuite déterminons a par la condition

$$2(A+3a)=(A'+a)+(A''+a)$$

c'est-à-dire

$$4a=A'+A''-2A.$$

On aura alors

$$\psi_1(x,y,z)=A_1x^2+A_1'+y^2+A_1''z^2+2Byz,$$

avec la relation

$$A_1'+A_1''=2A_1$$

L'origine se trouve ainsi bien fixée, ainsi que le plan $x=0$. Les plans $x\,o\,y$, $x\,oz$ sont encore indéterminés. Faisons-les tourner autour de ox, ce qui revient à remplacer y,z par

$$y\,\mathrm{Sin}\,\varphi-z\,\mathrm{cos}\,\varphi$$
$$y\,\mathrm{Cos}\,\varphi+z\,\mathrm{Sin}\,\varphi$$

nous pourrons disposer de φ de manière à faire disparaître le terme en yz, et comme $A_1'+A_1''$ est un invariant, pour cette transformation on aura encore

$$A_1'+A_1''=2A_1$$

En résumé nous pouvons, par un choix parfaitement déterminé des axes mettre l'équation de toute cubique circulaire sous la forme

$$(x^2+y^2+z^2)x+Lx^2+L'y^2+L''z^2-2Mx-2M'y-2M''z+P=0$$

où

$$L'+L''=2L$$

Cependant si l'on avait $L''=L'$ et par suite

$$L=L'=L''$$

on pourrait obtenir cette forme d'une infinité de manières; mais alors on pourra faire tourner les axes oz, oy de manière à avoir $M'=0$ et on aurait la forme plus réduite

$$(x^2+y^2+z^2)x+L(x^2+y^2+z^2)-2Mx-2M''z+P=0$$

L'identification avec l'équation des cyclides cubiques est immediate. On aura

$$2h+\alpha = -L,\ p-\alpha = L',\ q-\alpha = L''$$

d'où

$$p = L'+\alpha,\ q = L''+\alpha,\ 2h = -(L+\alpha)$$

la relation $p+q+4h=0$ est vérifiée d'elle-même par suite de la relation $L'+L''-2L=0$. On aura ensuite

$$\delta - 2h\alpha = M,\ p\beta = M',\ q\gamma = M''$$

c'est-à-dire

$$\delta = M - \alpha(L+\alpha),\ \beta = \frac{M'}{L'+\alpha},\ \gamma = \frac{M''}{L''+\alpha}$$

Ces équations, ainsi que les précédentes font tout dépendre de α; cette quantité α sera donnée par l'équation

$$P = p\beta^2 + q\gamma^2 + 2\alpha\delta - 2h\alpha^2$$

$$= \frac{M'^2}{L'+\alpha} + \frac{M''^2}{L''+\alpha} - 2\alpha\left[\alpha^2 + L\alpha - M\right] + (L+\alpha)\alpha^2$$

c'est-à-dire, après réduction

$$f(\alpha) = P - \frac{M'^2}{L'+\alpha} - \frac{M''^2}{L''+\alpha} + \alpha^3 + L\alpha^2 - 2M\alpha = 0$$

équation du cinquième degré qui fournit les cinq anallagmaties de la surface

On pourra refaire sur cette équation les mêmes calculs que pour les cyclides du 4e ordre, et retrouver les mêmes théorèmes. La discussion elle-même ne diffère pas beaucoup.

Une racine double ou triple autre que L', L'' correspond aux mêmes faits. M' ou M'' nuls indiquent des plans de symétrie et une anallagmatie perdue. $L''=L'$ indique comme déférentes des paraboloïdes de révolution. Si $-L'$ est racine double du numérateur de $f(\delta)$, la cyclide admet une parabole comme déférente; elle a deux points doubles qui coïncident avec un point du plan de la déférente si $-L'$ est racine triple; ce point est lui-même sur la déférente si $-L'$ est racine quadruple. Enfin, si L', L'' sont racines multiples du numérateur de $f(\delta)$, la cyclide possède deux déférentes

D'abord L, L', L'' différents : symboles,

(L, L, L', L', S) $\quad$ (L, L, L', L', L'')

(L, L, L, L', L')

Soit maintenant $L' = L''$, on a les symboles

(L, L, L', L', S)

(L, L, L, L', L')

Le symbole (L, L, L'', L'', L'') est exclu par le lemme c. Enfin, dans le cas C on ne peut avoir évidemment $L = L' = L''$.

Nous avons ainsi énuméré tous les cas possibles. Nous allons montrer comment ils sont réalisés.

Observons d'abord qu'un type du cas A, un du cas B, un du cas C sont absolument irréductibles les uns aux autres par inversion, puisque dans le cas A aucune cyclide n'a ses lignes de courbure circulaires, que dans le cas B elles ont toutes une famille de lignes de courbure circulaires, et que dans le cas C les deux familles de lignes de courbure sont circulaires.

Ceci posé, nous allons parcourir tous les symboles compris dans l'un de ces trois types et réunir ensemble tous ceux que l'on peut ramener les uns aux autres par inversion. Nous disons des cyclides réductibles les uns aux autres par inversion qu'elles constituent un genre, chacune des cyclides du genre constituera une espèce.

Cas A

Premier genre (six espèces)

1° — $(S, S', S'', S''', S^{IV})$ — C'est le cas général, on l'obtient en associant à une déférente superficielle D quelconque (mais à centre, comme dans tout ce qui va suivre) une sphère quelconque Σ. Cinq anallagmatiques.

2° — (S, S', S'', S''', L) — La sphère Σ a son centre dans un plan principal de D. Ce plan est un plan de symétrie de la cyclide. Quatre

anallagmaties. Caractère : M est nul

3° — (S, S', S'', L, L') — La sphère Σ a son centre sur un axe de D — Les deux plans principaux passant par cet axe sont des plans de symétrie. Trois anallagmaties. Caractère : $M = M' = 0$.

4° — (S, S', L, L', L'') — La sphère Σ est concentrique à la déférente. Les trois plans principaux de la déférente sont des plans de symétrie. Deux anallagmaties. Caractère : $M = M' = M'' = 0$.

5° — (S, S', S'', S''', L) et $L = L'$ — Cyclide à déférentes de révolution. Quatre anallagmaties et une symétrie. Les quatre axes des surfaces de révolution sont dans ce plan de symétrie, ainsi que les centres des sphères directrices.

(Nous prouverons que l'on engendre cette cyclide en prenant l'inverse de la cyclide générale par rapport à un point de l'une de ses focales) Caractère : $L = L'$, $M = 0$.

6° — (S, S', S'', L, L'') et $L = L'$ — Cyclide à déférentes de révolution ; mais à deux symétries. Il reste trois anallagmaties dans lesquelles le centre de la sphère directrice est dans le plan de l'équateur de la surface déférente.

(Même remarque que pour le cas précédent). Caractère $L = L'$ $M = M' = 0$.

Deuxième genre (six espèces)

1° — (S, S, S', S'', S''') — Cyclide à point double. Podaire de quadrique à centre ; inverse de quadrique. Une anallagmatie exceptionnelle qui compte double ; trois anallagmaties simples dans lesquelles la quadrique déférente est touchée par la sphère directrice. Caractère : une racine double.

2° — (S, S, S', S'', L) — Même cas que le précédent, mais avec une symétrie — Podaire de quadrique par rapport à un point d'un plan principal, ou inverse d'une quadrique par rapport à un point d'un plan principal. Une anallagmatie exceptionnelle qui compte double ; une symétrie, et deux anallagmaties dans lesquelles la sphère directrice

touche la quadrique déférente en un point de l'une de ses sections principales. Caractère : racine double et $M = 0$.

3°_ (S, S, S', L, L') ___ De même. Seulement le pôle d'inversion est sur un axe de la quadrique. Deux symétries ; une anallagmatie double et une autre anallagmatie dans laquelle la déférente est touchée en un de ses sommets par la sphère directrice. Caractère : racine double et $M = M' = 0$.

4°_ (S, S, L, L', L'') ___ Podaire de quadrique par rapport à son centre; inverse de quadrique par rapport à son centre. Une anallagmatie double ; trois symétries, plus d'anallagmatie simple. Caractère : racine double et $M = M' = M'' = 0$; on a $P = 0$.

5°_ (S, S, S', S'', L) et $L = L'$ ___ Cyclide à point double et à déférente de révolution. Podaire de surface de révolution ; inverse d'une quadrique par rapport à un point d'une de ses focales. Une symétrie ; une anallagmatie double et deux anallagmaties simples, dans lesquelles la déférente, de révolution, est touchée par la sphère directrice. Caractère : $L = L'$ et une racine double.

6°_ (S, S, S', L'', L) et $L = L'$. ___ Cyclide à point double, à deux symétries et à déférente de révolution. Podaire d'une surface de révolution par rapport à un point du plan de son équateur. Inverse d'une quadrique par rapport à un foyer d'une de ses sections principales. Deux symétries ; une anallagmatie double, et une anallagmatie simple, dans laquelle la sphère directrice touche la déférente de révolution en un point de son équateur.

(Nous verrons que ces espèces 5 et 6 dérivent par inversion de la cyclide générale à point double) Caractère : $L = L'$, $M = M' = 0$, et une racine double.

Troisième genre (cinq espèces)

1°_ (S, S, S, S', S'') ___ Cyclide à point double avec cône décomposé. Podaire

de quadrique à centre par rapport à un de ses points ; inverse de paraboloïde Une anallagmatie triple exceptionnelle ; deux anallagmaties simples, dans lesquelles la déférente est coupée par la sphère directrice suivant une cyclique à rebroussement. Caractère : racine triple.

2°_ (S, S, S, S', L) — La même chose, mais une symétrie en plus. Podaire d'une quadrique à centre par rapport à un point d'une section principale ; inverse d'un paraboloïde par rapport à un point d'un plan principal. Une symétrie ; une anallagmatie triple, et une simple, dans laquelle la déférente est touchée par la sphère directrice en un point d'une section principale, avec rebroussement de la cyclique d'intersection. Caractère : racine triple et $M = 0$.

3°_ (S, S, S, L, L') — La même chose, mais avec deux symétries, et plus d'anallagmatie simple. Podaire de quadrique à centre par rapport à un sommet ; inverse de paraboloïde par rapport à un point de l'axe. Caractère : racine triple et $M = M' = 0$.

4°_ (L, S, S, S, S') avec L' = L. — Podaire d'une quadrique de révolution par rapport à l'un de ses points ; inverse d'un paraboloïde par rapport à un point de l'une de ses focales. Un plan de symétrie ; une anallagmatie triple une anallagmatie simple dans laquelle la déférente est de révolution et est coupée par la sphère directrice suivant une cyclique à rebroussement. Caractère : racine triple L' = L.

5°_ (L, S, S, S, L") avec L' = L — Podaire d'une quadrique de révolution par rapport à un point du parallèle équatorial ; inverse d'un paraboloïde par rapport au foyer d'une section principale. Deux symétries ; une anallagmatie triple. Caractère : racine triple : $M = M' = 0$.

Cas B _ Cyclide à lignes de courbures circulaires, pour une famille.

Premier genre (Sept espèces)

1°_ (L, L , S, S', S") — Type général des cyclides à déférente curviligne. Inverse

Roch N° 25

de cône ; podaire de quadrique. Deux points doubles. Trois anallagmaties doubles dans lesquelles la sphère directrice est bi-tangente à la quadrique déférente. Les deux points de contact sont les points doubles. Deux symétries. Caractère : L racine double.

2°_(L, L, S, S', L') ___ La même chose, mais avec une symétrie de plus. Inverse de cône par rapport à un point d'un plan principal. Podaire de conique par rapport à un point de l'un des deux plans de symétrie (pas du plan de la conique). Deux anallagmaties dans lesquelles la sphère directrice touche la déférente en deux points d'une section principale. Deux symétries. Caractère : L racine double et M' = M = 0.

3°_ (L, L, S, L', L") . ___La même chose encore mais avec deux symétries de plus que pour la première espèce. Inverse de cône par rapport à un point de son axe. Podaire de conique par rapport à un point de la normale élevée en son centre à son plan. Trois symétries, une anallagmatie simple dans laquelle la sphère directrice est concentrique et bi-tangente à la déférente. Caractère : M = M" = M" = 0

4°_(L, L, S, S', S") avec L' = L ___ Surface cyclide de révolution la plus générale. Trois déférentes de révolution, autour du même axe ; les sphères directrices ont leurs centres sur cet axe. Caractère : L = L', M = M' = 0.

5°_(L, L, S, S, L") avec L' = L ___ Surface cyclide de révolution, mais avec un plan de symétrie. Deux anallagmaties dans lesquelles les déférentes sont de révolution et concentriques aux sphères directrices. Caractère : M = M' = M" avec L' = L.

6°_(L, L, L', S, S') avec L' = L" ___ C'est l'espèce 1 de ce même genre, mais dans laquelle les déférentes sont de révolution, et la déférente plane est un cercle. Nous avons donc une cyclide à déférente circulaire ; podaire d'un cercle inverse d'un cône du second degré par rapport à un point d'une de ses focales. Deux symétries et deux anallagmaties dans lesquelles la déférente est de révolution et est bi-tangente à la sphère directrice. La sphère directrice coupe la déférente suivant deux paraboles tangentes au cercle de l'infini.

Caractère $L''=L'$, L racine double.

7°_ (L, L, S, S', S'') et $L=L'=L''$ ___ Cyclide de révolution; trois anallagmaties à déférente sphérique. Caractère : $L=L'=L''$. Les méridiennes sont des ovales de Descartes.

Deuxième genre. (Quatre espèces).

1°_ (L, L, L, S, S') ___ Cyclide podaire de conique par rapport à un point de son plan, et inverse d'un cylindre à centres du second degré. Deux anallagmaties ; la déférente est coupée par la sphère directrice suivant deux cercles tangents entre eux. C'est la première espèce (L, L, S, S', S'') du premier genre, dans laquelle les points doubles coïncident. Caractère : L racine triple.

2°_ (L, L, L, S, L') ___ Cyclide podaire de conique par rapport à un point d'un de ses axes. Inverse d'un cylindre à centres par rapport à un point de l'un des deux plans principaux. Une seule anallagmatie, dans laquelle la sphère directrice coupe la déférente suivant deux cercles qui se coupent en un sommet de la déférente. Caractère : L racine triple et $M'=0$.

3°_ (L, L, L, L', L'') ___ Cyclide podaire de conique par rapport à son centre. Inverse de cylindre par rapport à un de ses centres. Plus d'anallagmatie, mais trois symétries. Caractères : $M=M'=M''=0$, $L=P=0$.

4°_ (L, L, L, L', S) avec $L''=L'$ ___ Cyclide à déférente circulaire et à déférente de révolution. Podaire d'un cercle par rapport à un point de son plan. Inverse d'un cylindre par rapport à un point de l'une de ses focales. Deux symétries et une anallagmatie dans laquelle la sphère directrice coupe la déférente de révolution, suivant deux paraboles tangentes au cercle de l'infini et tangentes entre elles dans le plan de l'équateur.

Troisième genre (3 espèces).

1°_ (L, L, L, L, S) ___ Cyclide podaire d'une conique à centre par rapport à un de ses points, et inverse d'un cylindre parabolique. Une anallagmatie dans laquelle la sphère directrice coupe la déférente suivant deux cercles tangents entre eux en un ombilic. Caractère: L racine quadruple.

2°_ (L, L, L, L, L') ___ Cyclide podaire d'une conique par rapport à l'un de ses sommets. Inverse d'un cylindre parabolique par rapport à un point de son plan diamétral principal. Caractère: L racine quadruple et M'=0.

3°_ (L, L, L, L, L') avec L'=L''. ___ Cyclide podaire d'un cercle par rapport à un de ses points, et inverse d'un cylindre parabolique par rapport à un point de sa droite focale. Caractère: L racine quadruple et L''=L'.

Quatrième genre (six espèces).

1°_ (L, L, S, S, S') ___ Cyclide inverse d'une quadrique de révolution, et podaire d'une autre quadrique par rapport à un point de l'une de ses focales. Une anallagmatie double et une autre simple dans laquelle la déférente est coupée par la sphère directrice suivant deux cercles dont l'un de rayon nul. Le centre de ce dernier est le pôle de l'anallagmatie double; les points où le cercle de rayon nul coupe l'autre cercle sont deux autres points doubles de la cyclide, qui admet ainsi trois points doubles. Caractère: deux racines doubles, dont l'une est L.

2°_ (L, L, S, S, L') ___ Cyclide inverse d'une quadrique de révolution par rapport à un point du plan de son équateur, et podaire d'une autre quadrique par rapport à un foyer d'une section principale. Plus d'anallagmatie simple. Caractère: comme le cas précédent, et en plus M'=0

3°_ (L, L, S, S, S') et L=L' ___ Cyclide de révolution à point double. Podaire et inverse de deux surfaces de révolution autour d'un même axe, par rapport à un point de cet axe. Une anallagmatie dans laquelle la déférente

est touchée par la sphère directrice en un de ses sommets. Caractère : deux racines doubles, dont L et en outre $L = L'$.

4°_ $(L, L, \delta, \delta, L'')$ et $L = L''$ ___ Plus d'anallagmatie simple. Podaire d'une quadrique de révolution par rapport à son centre, et inverse d'une quadrique concentrique à la première. Caractère : comme la seconde espèce, mais en outre $L - L'$

5°_ $(L, L, L', \delta, \delta)$ et $L' = L''$. ___ Podaire d'une quadrique de révolution par rapport à un point de son cercle focal ; inverse d'une autre quadrique de révolution par rapport à un point de son cercle focal.

6°_ $(L, L, \delta, \delta, \delta')$ et $L = L' = L''$ ___ Cyclide de révolution. Une anallagmatie à déférente sphérique. La déférente touche la sphère directrice. Une anallagmatie double. Inverse d'une quadrique de révolution par rapport à un de ses deux foyers ; podaire d'une sphère : caractère : $L = L' = L''$ et racine double.

Cinquième genre (trois espèces)

1°_ $(L, L, \delta, \delta, \delta)$ ___ Inverse d'un paraboloïde de révolution et podaire d'une quadrique par rapport à un de ses ombilics.

2°_ $(L, L, \delta, \delta, \delta)$ avec $L = L'$ ___ Podaire d'une quadrique de révolution par rapport à un de ses sommets, et inverse d'un paraboloïde de révolution par rapport à un point de son axe. Cyclide de révolution.

3°_ $(L, L, \delta, \delta, \delta)$ $L = L' = L''$ ___ Podaire d'une sphère par rapport à un de ses points ; inverse d'un paraboloïde de révolution par rapport à son foyer. Plus d'anallagmatie.

Cas C _ Toute ligne de courbure est circulaire.

Premier genre (trois espèces).

1°_ (L, L, L', L', δ) ___ Deux déférentes curvilignes focales l'une de l'autre. Inverse d'un cône de révolution ; podaire d'une conique par rapport à un

point d'une focale. Une anallagmatie dans laquelle la déférente et la sphère directrice sont concentriques et se coupent suivant deux cercles de rayon nul. Elles sont tangentes en 4 points et ces points sont des points doubles de la cyclide. C'est la cyclide de Dupin.

2°_ (L, L, L', L', L'') ___ Plus d'anallagmatie ; podaire d'une conique par rapport à un point où la perpendiculaire en son centre à son plan coupe une focale. Inverse d'un cône de révolution par rapport à un point de son équateur.

3°_ $(L, L, L'', L^{\infty}, S)$ et $L' = L$ ___ C'est le tore. Inverse d'un cône de révolution par rapport à un point de son axe, podaire d'un cercle par rapport à un point de son axe. Une anallagmatie, dans laquelle la sphère directrice touche la déférente (qui est de révolution) en ses deux sommets.

Second genre (deux espèces)

1°_ (L, L, L, L', L') ___ Deux déférentes planes focales l'une de l'autre. Deux des quatre points doubles coïncident. Podaire d'une conique par rapport à un de ses foyers. Inverse d'un cylindre de révolution. Pas d'anallagmatie.

2°_ (L, L, L, L', L') avec $L' = L''$ ___ Cyclide de révolution. Tore engendré par la rotation d'un cercle autour d'une de ses tangentes. Podaire d'un cercle par rapport à son centre, inverse d'un cylindre de révolution par rapport à un point de son axe

---

Cyclides cubiques

Lorsque la déférente touche le plan de l'infini est du troisième ordre seulement. Prenons, pour origine le milieu du segment compris, sur l'axe de la déférente, entre les deux foyers des paraboles principales, et pour plan des xoz et xoy les plans principaux. L'équation tangentielle de la quadrique

xcra $$p\,\eta^2 + q\,\xi^2 - 2\xi(\tau + h\,\xi) = 0,$$

et son équation ponctuelle.

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} - 4(x-h) = 0;$$

seulement si p ou q sont nuls, la quadrique se réduit à une parabole.

Maintenant, en égard au choix de l'origine on a

$$h = -\frac{p+q}{4}$$

et la distance des foyers à l'origine est $\pm\frac{q-p}{2}$.

L'équation de la cyclide s'écrit dès lors (p. 118)

$$p(y-\beta)^2 + q(z-\gamma)^2 - 2(x-\alpha)\left\{2\delta - \overline{x^2+y^2+z^2} + 2h\overline{x-\alpha}\right\}$$

On reconnait ainsi que le pôle d'anallagmatie (α, β, γ) se trouve sur la cyclide.

Développons, il vient

$$(x^2+y^2+z^2)x$$
$$-(2h+\alpha)x^2 + (p-\alpha)y^2 + (q-\alpha)z^2$$
$$-2(\delta - 2h\alpha)x - 2p\beta y - 2q\gamma z + (p\beta^2 + q\gamma^2 + 2\alpha\delta - 2h\alpha^2) = 0$$

Toute surface cubique circulaire peut être ramenée à cette forme, et d'une seule manière.

En effet, toute surface cubique circulaire a une équation de la forme.

$$(x^2+y^2+z^2)(lx+my+nz) + \theta(x,y,z) = 0,$$

où θ est un polynôme en x, y, z du second degré, ainsi que les polynômes que j'aurai à désigner plus tard par $\theta_1, \theta_2, \ldots\ldots$

En prenant le plan $x=0$ parallèle au plan $lx+my+nz=0$, nous aurons d'abord la forme la plus simple

$$(x^2+y^2+z^2)x + \theta_1(x,y,z) = 0$$

Soit

$$\Psi(x,y,z) = Ax' + A'y' + A''z' + 2By z + 2B'zx + 2B''xy.$$

l'ensemble des termes du second degré dans $\theta_1(x,y,z)$; effectuons un transport d'origine en remplaçant x, y, z par $a+x'$, $b+y'$, $c+z'$ il viendra en n'écrivant que les termes du troisième et du second degré

$$(x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz)x + a(x^2+y^2+z^2) + \Psi(x,y,z) + \ldots\ldots$$

c'est-à-dire,

$$(x^2+y^2+z^2)x+\Psi_1(x,y,z)+\ldots\ldots$$

où

$$\Psi_1(x,y,z)=(A+3a)x^2+(A'+a)y^2+(A''+a)z^2$$
$$+2By\,z+2(B'+c)zx+z(B''+b)xy;$$

si l'on prend $b=-B''$, $c=-B'$ on voit que les termes en zx et xy disparaissent. Ensuite déterminons a par la condition

$$2(A+3a)=(A'+a)+(A''+a)$$

c'est-à-dire

$$4a=A'+A''-2A.$$

On aura alors

$$\Psi_1(x,y,z)=A_1x^2+A_1'+y^2+A_1''z^2+2Byz,$$

avec la relation

$$A_1'+A_1''=2A_1$$

L'origine se trouve ainsi bien fixée, ainsi que le plan $x=0$. Les plans $x\,o\,y$, $x\,oz$ sont encore indéterminés. Faisons-les tourner autour de ox, ce qui revient à remplacer y,z par

$$y\,\mathrm{Sin}\,\varphi-z\,\mathrm{cos}\,\varphi$$
$$y\,\mathrm{Cos}\,\varphi+z\,\mathrm{Sin}\,\varphi$$

nous pourrons disposer de φ de manière à faire disparaître le terme en yz, et comme $A_1'+A_1''$ est un invariant, pour cette transformation on aura encore

$$A_1'+A_1''=2A_1$$

En résumé nous pouvons, par un choix parfaitement déterminé des axes mettre l'équation de toute cubique circulaire sous la forme

$$(x^2+y^2+z^2)x+Lx^2+L'y^2+L''z^2-2Mx-2M'y-2M''z+P=0$$

où
$$L'+L''=2L$$

Cependant si l'on avait $L''=L'$ et par suite

$$L=L'=L''$$

on pourrait obtenir cette forme d'une infinité de manières; mais alors on pourra faire tourner les axes oz, oy de manière à avoir $M'=0$ et on aurait la forme plus réduite $(x^2+y^2+z^2)x+L(x^2+y^2+z^2)-2Mx-2M''z+P=0$

L'identification avec l'équation des cyclides cubiques est immédiate. On aura

$$2h+\alpha = -L,\ p-\alpha = L',\ q-\alpha = L''$$

d'où

$$p = L'+\alpha,\ q = L''+\alpha,\ 2h = -(L+\alpha)$$

la relation $p+q+4h=0$ est vérifiée d'elle-même par suite de la relation $L'+L''-2L=0$. On aura ensuite

$$\delta - 2h\alpha = M,\ p\beta = M',\ q\gamma = M''$$

c'est-à-dire

$$\delta = M - \alpha(L+\alpha),\ \beta = \frac{M'}{L'+\alpha},\ \gamma = \frac{M''}{L''+\alpha}$$

Ces équations, ainsi que les précédentes font tout dépendre de α; cette quantité α sera donnée par l'équation

$$P = p\beta^2 + q\gamma^2 + 2\alpha\delta - 2h\alpha^2$$

$$= \frac{M'^2}{L'+\alpha} + \frac{M''^2}{L''+\alpha} - 2\alpha\left[\alpha^2 + L\alpha - M\right] + (L+\alpha)\alpha^2$$

c'est-à-dire, après réduction

$$f(\alpha) \quad = P - \frac{M'^2}{L'+\alpha} - \frac{M''^2}{L''+\alpha} + \alpha^3 + L\alpha^2 - 2M\alpha = 0$$

équation du cinquième degré qui fournit les cinq anallagmaties de la surface

On pourra refaire sur cette équation les mêmes calculs que pour les cyclides du 4e ordre, et retrouver les mêmes théorèmes. La discussion elle-même ne diffère pas beaucoup.

Une racine double ou triple autre que L', L'' correspond aux mêmes faits. M' ou M'' nuls indiquent des plans de symétrie et une anallagmatie perdue. $L''=L'$ indique comme déférentes des paraboloïdes de révolution. Si $-L'$ est racine double du numérateur de $f(\delta)$, la cyclide admet une parabole comme déférente; elle a deux points doubles qui coïncident avec un point du plan de la déférente si $-L'$ est racine triple; ce point est lui-même sur la déférente si $-L'$ est racine quadruple. Enfin, si L', L'' sont racines multiples du numérateur de $f(\delta)$, la cyclide possède deux déférentes

planes, paraboles focales l'une de l'autre et l'on a une variante de la cyclide de Dupin.

Le lecteur établira facilement d'après ces principes une classification des cyclides cubiques, calquée, pour ainsi dire, sur celle que nous avons donnée pour les cyclides du quatrième ordre.

Remarque sur la transformation des déférentes d'une cyclide

Considérons les sphères Σ orthogonales à une sphère fixe $S(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$. L'équation d'une sphère Σ quelconque s'écrira nous le savons, (page)

$$x^2+y^2+z^2-2x_1x-2y_1y-2z_1z+2(\alpha x_1+\beta y_1+\gamma z_1-\delta)=0.$$

Effectuons une inversion, qu'on peut toujours supposer avoir son centre à l'origine ; les formules de cette transformation seront les suivantes

$$x'=\frac{Kx}{x^2+y^2+z^2},\quad y'=\frac{Ky}{x^2+y^2+z^2},\quad z'=\frac{Kz}{x^2+y^2+z^2}$$

et l'inverse de la sphère ci-dessus sera

$$2(\alpha x_1+\beta y_1+\gamma z_1-\delta)(x^2+y^2+z^2)-2Kx_1x-2Ky_1y-2Kz_1z+K^2=0$$

Appelons x_1', y_1', z_1' les coordonnées du centre de cette nouvelle sphère, nous aurons :

$$x_1'=\frac{\frac{1}{2}Kx_1}{\alpha x_1+\beta y_1+\gamma z_1-\delta} \qquad y_1'=\frac{\frac{1}{2}Ky_1}{\alpha x_1+\beta y_1+\gamma z_1-\delta}$$

$$z_1'=\frac{\frac{1}{2}Kz_1}{\alpha x_1+\beta y_1+\gamma z_1-\delta}$$

On voit donc que les centres des sphères orthogonales à une sphère fixe correspondent homographiquement aux centres des inverses de ces sphères dans une inversion quelconque. Il est facile de reconnaître que cette homographie est une homologie, en effet, les points correspondants sont alignés sur l'origine Si, en outre on considère un plan

$$\xi_1x_1+\eta_1y_1+\zeta_1z_1+\tau_1=0$$

et son homologue

$$\xi_1' x_1' + \eta_1' y_1' + \xi_1' z_1' + \tau_1' = 0;$$

on aura

$$\xi_1' = \alpha \tau_1 + \delta \xi_1$$
$$\eta_1' = \beta \tau_1 + \delta \eta_1$$
$$\xi_1' = \gamma \tau_1 + \delta \xi_1$$
$$\tau_1' = -\frac{1}{2} K \tau_1$$

en sorte que deux plans homologues se coupent dans le plan

$$\alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma z_1 - \frac{1}{2} K = 0$$

le plan est donc le plan d'homologie

Le plan

$$\alpha x + \beta y + \gamma z - \delta = 0,$$

c'est-à-dire le plan radical de la sphère S et de la sphère de rayon nul Ω qui a pour centre le pôle d'inversion, a pour homologue le plan de l'infini. Donc, dans cette homologie, le cercle commun aux sphères S et Ω a pour homologue dans la nouvelle figure le cercle de l'infini. On observera que si l'on appelle S' la sphère inverse de la sphère S', et si l'on désigne par α', β', γ', δ' les coordonnés de cette sphère, les formules de la transformation homographique, résolues en x_1, y_1, z_1 demeurent

$$x_1 = \frac{\frac{1}{2} K x_1'}{\alpha' x_1' + \beta' y_1' + \gamma' z_1' - \delta'}$$

et ainsi de suite.

Les sphères S et S' jouent un rôle entièrement symétrique, et le cercle d'intersection de S' et de Ω est le transformé du cercle de l'infini.

Ainsi une conique coupant deux fois le cercle de l'infini (cercle) aura pour transformée une conique coupant deux fois le cercle commun à S' et à Ω; inversement, une conique qui coupe deux fois le cercle commun à S et à Ω a pour transformée un cercle. De même de la condition pour une surface d'être de révolution. On conçoit combien cette remarque peut être profitable pour transformer certaines propriétés des surfaces déférentes; les propriétés focales peuvent également servir à cet objet; mais l'homographie précédente n'en a pas

moins son utilité.

La découverte de cette homologie est due à Mr de la Gournerie.

Je donnerai l'application suivante, entre bien d'autres. Montrer comment on peut passer, par inversion de la première espèce à la sixième espèce du premier genre du cas B des cyclides du quatrième ordre. Il s'agit tout simplement de passer d'une déférente plane quelconque à une déférente circulaire. Considérons une sphère S menée par le cercle Θ_1; toutes les sphères enveloppées seront orthogonales à cette sphère. La déférente plane D_1 coupe S en quatre points situés évidemment sur Θ_1. Pour que la déférente D devienne un cercle dans la nouvelle cyclide, il faut et il suffit que le cercle commun aux sphères S et Σ (celle-ci de rayon nul a son centre au pôle d'inversion) rencontre deux fois la conique D_1. Or S et D_1 se coupent en 4 points bien déterminés; il sera donc nécessaire et suffisant que la sphère Σ passe par deux de ces points F, F'. Le sommet de Σ (pôle de l'inverse cherchée) sera donc sur le cercle d'intersection des deux sphères de rayon nul qui ont respectivement F et F' pour centres.

Faisons la remarque suivante : Le cercle que nous venons de trouver est orthogonal à toutes les sphères menées par F et F'. En particulier, il est orthogonal aux sphères de rayon nul menées par le cercle Θ_1, il passe donc par les deux points doubles de la surface. Comme on peut associer les 4 points de rencontre de Θ_1 et de D_1 de six manières deux à deux, il y a donc six cercles comme celui que nous venons de définir. Il est facile de prouver que ces six cercles sont précisément ceux que l'on obtient en coupant chacune des trois déférentes superficielles par la sphère directrice qu'il accompagne. Cela résultera des propriétés focales.

Autre application: Quelles sont les cyclides que l'on peut transformer par inversion en des cyclides à déférentes sphériques?

Pour que la déférente de la nouvelle surface soit une sphère, il faut que la déférente primitive passe par le cercle d'intersection des sphères S et Σ. Ici S est donné et il faut pouvoir choisir Σ. Il faut donc

que S coupe sa déférente superficielle correspondante suivant un cercle. Les centres des sphères de rayon nul menées par ce cercle seront des pôles d'inversion vérifiant la condition cherchée. Or quelles sont les cyclides les plus générales à déférentes superficielles coupées suivant des cercles par leurs sphères directrices? Ce sont celles de l'espèce 1 du genre 1 du cas B. C'est donc avec raison que nous avons rattaché à ce genre sa septième espèce. On observera que les points que l'on trouve ainsi sont précisément les quatre points de rencontre, déjà considérés, du cercle Θ_1 avec la déférente plane D_1.

Même démonstration que pour l'espèce 6ième du quatrième genre du cas B.

La troisième espèce du cinquième genre se légitime comme il suit: Considérons la première espèce de ce genre. Le cône isotrope S qui a pour sommet l'ombilic coupe la quadrique suivant un cercle de rayon nul et suivant un autre cercle, dont le plan est forcément réel. Le symétrique I de l'ombilic par rapport à ce plan est le centre d'une autre sphère Σ de rayon nul passant par ce cercle. Prenons I pour pôle d'inversion, puisque la déférente primitive passe par le cercle d'intersection de Σ avec la sphère directrice S (il importe peu que son rayon soit nul) il en résulte que la déférente de la surface transformée sera une sphère. On obtient, on le voit, comme transformée l'espèce 3e.

L'espèce 2e s'obtiendrait au contraire en prenant le cercle d'intersection de S et de Σ bitangent à la quadrique déférente primitive.

Focales des Cyclides.

Les sphères de rayon nul bi-tangentes à une cyclide devant être cherchées parmi les sphères de générations anallagmatiques, nous voyons que les focales sont les cinq cycliques d'intersection de chaque quadrique déférente avec la sphère directrice correspondante. Nous retrouvons ainsi le système des cinq cycliques focales les unes des autres.

On observera, en passant, que le cas où les déférentes sont de révolution se ramène au cas général par une transformation qui change les cinq focales en des cartésiennes. De là ce théorème: Si l'on transforme par inversion une cyclide en prenant le pôle sur l'une des cinq focales, la cyclide transformée a des déférentes de révolution.

Nous nous sommes servi de ce théorème pour placer certaines espèces des genres du cas A.

Je n'insisterai pas davantage sur ces propriétés focales dont la place ne saurait être dans ce rapide exposé; je me contenterai de renvoyer encore au livre si souvent cités de Mr Darboux.

Rappelons cependant qu'il existe une famille de cyclides possédant les mêmes focales, et que cette famille forme un système triple et orthogonal; dont les inverses des quadriques homofocales offrent un exemple particulier.

Cercles des cyclides; plans bi-tangents.

Chaque génération de la cyclide donne lieu à deux familles de cercles. Il y a donc dix familles de cercles sur une cyclide. Ces familles sont associées deux à deux, et deux cercles de deux familles associées se coupent toujours en deux points; ils sont en effet situés sur une sphère bi-tangente. On peut conclure de là aussitôt que les axes (perpendiculaires à un cercle élevés à son plan en son centre) des cercles d'une famille coupent tous ceux des cercles associés et que ces deux systèmes d'axes sont les génératrices rectilignes de la quadrique déférente. On voit par là que les seules déférentes à génératrices rectilignes réelles peuvent fournir deux familles de cercles réels.

Le nombre des familles de cercles diminue quand les singularités augmentent. Sur la cyclide de Dupin il n'y en a que quatre, y compris les cercles de courbure.

Parmi les sphères bi-tangentes d'un mode de génération à deux paramètres il y en a une infinité qui sont réduites à des plans. Elles enveloppent autour de chaque pôle d'anallagmatie un cône du second

degré, supplémentaire du cône asymptote de la quadrique déférente correspondante.

L'existence de ces plans généralise largement le théorème de Villarceau sur les sections du tore. Chacun de ces plans bi-tangents coupe en effet la cyclide suivant deux cercles, puisqu'il fait partie d'une famille de sphères bi-tangentes.

Exercices.

1° — On considère les cercles C qui sont circonscrits à des triangles conjugués par rapport à une conique A et inscrits dans des triangles conjugués par rapport à une seconde conique B. Trouver le lieu des centres des cercles C et leur enveloppe.

2° — On considère le cercle osculateur d'une ellipse en l'un de ses points M, et l'on tire la corde unique MP commune au cercle et à l'ellipse. 1° Trouver les positions de M telles que la droite MP passe par un point donné P. 2° Il y a quatre points M, M', M'', M''' qui vérifient cette condition; prouver qu'ils sont sur un cercle C. 3° Trouver le lieu du centre de ce cercle et son enveloppe, lorsque le point P décrit l'ellipse A. (Agrégation 1882).

On pourra traiter la même question dans l'hypothèse où le point P décrit une conique quelconque. On trouve une cyclique dont on cherchera les divers modes de génération.

3° — On envisage les cercles orthogonaux à un cercle fixe et dont le centre décrit une conique bi-tangente à ce cercle. Trouver l'enveloppe de ces cercles.

4° — On considère des coniques inscrites dans un quadrilatère Q circonscrit à un cercle A. 1° Lieu des foyers de ces coniques. 2° Lieu

des pieds des normales abaissées du centre du cercle sur ces conique. 3° Enveloppe des tangentes menées en ces points aux coniques. 4° Lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du centre du cercle A sur les axes de ces coniques. 5° Lieu des pieds des perpendiculaires abaissées de ce même point sur les polaires dans ces diverses coniques. 6° Enveloppe de ces polaires ainsi que des axes.

5°— On donne un point O et un plan π et l'on envisage les cônes du second degré de sommet O, capables d'un trièdre trirectangle inscrit et qui sont coupés par le plan π suivant un cercle dont le centre est sur une parabole qui a pour foyer la projection du point O sur le plan π. 1° Trouver l'enveloppe des cercles tracés des cônes. 2° Trouver le lieu de leurs axes et l'enveloppe des plans principaux

6°— On considère une famille de surfaces du second degré homofocales et un point A sur un des axes. 1° Trouver le lieu des courbes de contact des cônes circonscrits qui ont A pour sommet 2° Chercher les sphères bi-tangentes à la surface trouvée, les cercles qui y sont tracés etc.....
(G. Darboux).

---

planes, paraboles focales l'une de l'autre et l'on a une variante de la cyclide de Dupin.

Le lecteur établira facilement d'après ces principes une classification des cyclides cubiques, calquée, pour ainsi dire, sur celle que nous avons donnée pour les cyclides du quatrième ordre.

Remarque sur la transformation des déférentes d'une cyclide

Considérons les sphères Σ orthogonales à une sphère fixe $S(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$. L'équation d'une sphère Σ quelconque s'écrira nous le savons, (page)

$$x^2+y^2+z^2-2x_1x-2y_1y-2z_1z+2(\alpha x_1+\beta y_1+\gamma z_1-\delta)=0.$$

Effectuons une inversion, qu'on peut toujours supposer avoir son centre à l'origine ; les formules de cette transformation seront les suivantes

$$x'=\frac{Kx}{x^2+y^2+z^2},\quad y'=\frac{Ky}{x^2+y^2+z^2},\quad z'=\frac{Kz}{x^2+y^2+z^2}$$

et l'inverse de la sphère ci-dessus sera

$$2(\alpha x_1+\beta y_1+\gamma z_1-\delta)(x^2+y^2+z^2)-2Kx_1x-2Ky_1y-2Kz_1z+K^2=0$$

Appelons x_1', y_1', z_1' les coordonnées du centre de cette nouvelle sphère, nous aurons :

$$x_1'=\frac{\frac{1}{2}Kx_1}{\alpha x_1+\beta y_1+\gamma z_1-\delta}\qquad y_1'=\frac{\frac{1}{2}Ky_1}{\alpha x_1+\beta y_1+\gamma z_1-\delta}$$

$$z_1'=\frac{\frac{1}{2}Kz_1}{\alpha x_1+\beta y_1+\gamma z_1-\delta}$$

On voit donc que les centres des sphères orthogonales à une sphère fixe correspondent homographiquement aux centres des inverses de ces sphères dans une inversion quelconque. Il est facile de reconnaître que cette homographie est une homologie, en effet, les points correspondants sont alignés sur l'origine. Si, en outre on considère un plan

$$\xi_1x_1+\eta_1y_1+\zeta_1z_1+\tau_1=0$$

et son homologue

$$\xi_1' x_1' + \eta_1' y_1' + \zeta_1' z_1' + \tau_1' = 0;$$

on aura

$$\begin{aligned}
\xi_1' &= \alpha \tau_1 + \delta \xi_1 \\
\eta_1' &= \beta \tau_1 + \delta \eta_1 \\
\zeta_1' &= \gamma \tau_1 + \delta \zeta_1 \\
\tau_1' &= -\frac{1}{2} K \tau_1
\end{aligned}$$

en sorte que deux plans homologues se coupent dans le plan

$$\alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma z_1 - \frac{1}{2} K = 0$$

le plan est donc le plan d'homologie

Le plan

$$\alpha x + \beta y + \gamma z - \delta = 0,$$

c'est-à-dire le plan radical de la sphère S et de la sphère de rayon nul Ω qui a pour centre le pôle d'inversion, a pour homologue le plan de l'infini. Donc, dans cette homologie, le cercle commun aux sphères S et Ω a pour homologue dans la nouvelle figure le cercle de l'infini. On observera que si l'on appelle S' la sphère inverse de la sphère S', et si l'on désigne par α', β', γ', δ' les coordonnés de cette sphère, les formules de la transformation homographique, résolues en x_1, y_1, z_1 demeurent

$$x_1 = \frac{\frac{1}{2} K x_1'}{\alpha' x_1' + \beta' y_1' + \gamma' z_1' - \delta'}$$

et ainsi de suite.

Les sphères S et S' jouent un rôle entièrement symétrique, et le cercle d'intersection de S' et de Ω est le transformé du cercle de l'infini.

Ainsi une conique coupant deux fois le cercle de l'infini (cercle) aura pour transformée une conique coupant deux fois le cercle commun à S' et à Ω; inversement, une conique qui coupe deux fois le cercle commun à S et à Ω a pour transformée un cercle. De même de la condition pour une surface d'être de révolution. On conçoit combien cette remarque peut être profitable pour transformer certaines propriétés des surfaces déférentes; les propriétés focales peuvent également servir à cet objet; mais l'homographie précédente n'en a pas

moins son utilité.

La découverte de cette homologie est due à Mr de la Gouvernerie.

Je donnerai l'application suivante, entre bien d'autres. Montrer comment on peut passer, par inversion de la première espèce à la sixième espèce du premier genre du cas B des cyclides du quatrième ordre. Il s'agit tout simplement de passer d'une déférente plane quelconque à une déférente circulaire. Considérons une sphère S menée par le cercle Θ_1; toutes les sphères enveloppées seront orthogonales à cette sphère. La déférente plane D_1 coupe S en quatre points situés évidemment sur Θ_1. Pour que la déférente D devienne un cercle dans la nouvelle cyclide, il faut et il suffit que le cercle commun aux sphères S et R (celle-ci de rayon nul a son centre au pôle d'inversion) rencontre deux fois la conique D_1. Or S et D_1 se coupent en 4 points bien déterminés; il sera donc nécessaire et suffisant que la sphère R passe par deux de ces points F, F'. Le sommet de R (pôle de l'inverse cherchée) sera donc sur le cercle d'intersection des deux sphères de rayon nul qui ont respectivement F et F' pour centres.

Faisons la remarque suivante : Le cercle que nous venons de trouver est orthogonal à toutes les sphères menées par F et F'. En particulier, il est orthogonal aux sphères de rayon nul menées par le cercle Θ_1, il passe donc par les deux points doubles de la surface. Comme on peut associer les 4 points de rencontre de Θ_1 et de D_1 de six manières deux à deux, il y a donc six cercles comme celui que nous venons de définir. Il est facile de prouver que ces six cercles sont précisément ceux que l'on obtient en coupant chacune des trois déférentes superficielles par la sphère directrice qu'il accompagne. Cela résultera des propriétés focales.

Autre application : Quelles sont les cyclides que l'on peut transformer par inversion en des cyclides à déférentes sphériques?

Pour que la déférente de la nouvelle surface soit une sphère, il faut que la déférente primitive passe par le cercle d'intersection des sphères S et R. Ici S est donné et il faut pouvoir choisir R. Il faut donc

que S coupe sa déférente superficielle correspondante suivant un cercle. Les centres des sphères de rayon nul menées par ce cercle seront des pôles d'inversion vérifiant la condition cherchée. Or quelles sont les cyclides les plus générales à déférentes superficielles coupées suivant des cercles par leurs sphères directrices? Ce sont celles de l'espèce 1 du genre 1 du cas B. C'est donc avec raison que nous avons rattaché à ce genre sa septième espèce. On observera que les points que l'on trouve ainsi sont précisément les quatre points de rencontre, déjà considérés, du cercle Θ_1 avec la déférente plane D_1.

Même démonstration que pour l'espèce 6ième du quatrième genre du cas B.

La troisième espèce du cinquième genre se légitime comme il suit: Considérons la première espèce de ce genre. Le cône isotrope S qui a pour sommet l'ombilic coupe la quadrique suivant un cercle de rayon nul et suivant un autre cercle, dont le plan est forcément réel. Le symétrique I de l'ombilic par rapport à ce plan est le centre d'une autre sphère Σ de rayon nul passant par ce cercle. Prenons I pour pôle d'inversion, puisque la déférente primitive passe par le cercle d'intersection de Σ avec la sphère directrice S (il importe peu que son rayon soit nul) il en résulte que la déférente de la surface transformée sera une sphère. On obtient, on le voit, comme transformée l'espèce 3e.

L'espèce 2e s'obtiendrait au contraire en prenant le cercle d'intersection de S et de Σ bitangent à la quadrique déférente primitive.

Focales des Cyclides.

Les sphères de rayon nul bi-tangentes à une cyclide devant être cherchées parmi les sphères de générations anallagmatiques, nous voyons que les focales sont les cinq cycliques d'intersection de chaque quadrique déférente avec la sphère directrice correspondante. Nous retrouvons ainsi le système des cinq cycliques focales les unes des autres.

On observera, en passant, que le cas où les déférentes sont de révolution se ramène au cas général par une transformation qui change les cinq focales en des cartésiennes. Delà ce théorème: Si l'on transforme par inversion une cyclide en prenant le pôle sur l'une des cinq focales, la cyclide transformée a des déférentes de révolution.

Nous nous sommes servi de ce théorème pour placer certaines espèces des genres du cas A.

Je n'insisterai pas davantage sur ces propriétés focales dont la place ne saurait être dans ce rapide exposé; je me contenterai de renvoyer encore au livre si souvent cités de Mr Darboux.

Rappelons cependant qu'il existe une famille de cyclides possédant les mêmes focales, et que cette famille forme un système triple et orthogonal; dont les inverses des quadriques homofocales offrent un exemple particulier.

Cercles des cyclides; plans bi-tangents.

Chaque génération de la cyclide donne lieu à deux familles de cercles. Il y a donc dix familles de cercles sur une cyclide. Ces familles sont associées deux à deux, et deux cercles de deux familles associées se coupent toujours en deux points; ils sont en effet situés sur une sphère bi-tangente. On peut conclure de là aussitôt que les axes (perpendiculaires à un cercle élevés à son plan en son centre) des cercles d'une famille coupent tous ceux des cercles associés et que ces deux systèmes d'axes sont les génératrices rectilignes de la quadrique déférente. On voit par là que les seules déférentes à génératrices rectilignes réelles peuvent fournir deux familles de cercles réels.

Le nombre des familles de cercles diminue quand les singularités augmentent. Sur la cyclide de Dupin il n'y en a que quatre, y compris les cercles de courbure.

Parmi les sphères bi-tangentes d'un mode de génération à deux paramètres il y en a une infinité qui sont réduites à des plans. Elles enveloppent autour de chaque pôle d'anallagmatie un cône du second

degré, supplémentaire du cône asymptote de la quadrique déférente correspondante.

L'existence de ces plans généralise largement le théorème de Villarceau sur les sections du tore. Chacun de ces plans bi-tangents coupe en effet la cyclide suivant deux cercles, puisqu'il fait partie d'une famille de sphères bi-tangentes.

Exercices.

1° — On considère les cercles C qui sont circonscrits à deux triangles conjugués par rapport à une conique A et inscrits dans des triangles conjugués par rapport à une seconde conique B. Trouver le lieu des centres des cercles C et leur enveloppe.

2° — On considère le cercle osculateur d'une ellipse en l'un de ses points M, et l'on tire la corde unique MP commune au cercle et à l'ellipse. 1° Trouver les positions de M telles que la droite MP passe par un point donné P. 2° Il y a quatre points M, M', M'', M''' qui vérifient cette condition; prouver qu'ils sont sur un cercle C. 3° Trouver le lieu du centre de ce cercle et son enveloppe, lorsque le point P décrit l'ellipse A. (Agrégation 1882).

On pourra traiter la même question dans l'hypothèse où le point P décrit une conique quelconque. On trouve une cyclique dont on cherchera les divers modes de génération.

3° — On envisage les cercles orthogonaux à un cercle fixe et dont le centre décrit une conique bi-tangente à ce cercle. Trouver l'enveloppe de ces cercles.

4° — On considère des coniques inscrites dans un quadrilatère Q circonscrit à un cercle A. 1° Lieu des foyers de ces coniques. 2° Lieu

des pieds des normales abaissées du centre du cercle sur ces coniques. 3° Enveloppe des tangentes menées en ces points aux coniques. 4° Lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du centre du cercle A sur les axes de ces coniques. 5° Lieu des pieds des perpendiculaires abaissées de ce même point sur les polaires dans ces diverses coniques. 6° Enveloppe de ces polaires ainsi que des axes.

5°— On donne un point O et un plan π et l'on envisage les cônes du second degré de sommet O, capables d'un triedre trirectangle inscrit et qui sont coupés par le plan π suivant un cercle dont le centre est sur une parabole qui a pour foyer la projection du point O sur le plan π. 1° Trouver l'enveloppe des cercles tracés des cônes. 2° Trouver le lieu de leurs axes et l'enveloppe des plans principaux

6°— On considère une famille de surfaces du second degré homofocales et un point A sur un des axes. 1° Trouver le lieu des courbes de contact des cônes circonscrits qui ont A pour sommet 2° Chercher les sphères bi-tangentes à la surface trouvée, les cercles qui y sont tracés etc..... (G. Darboux).